Mathebuch 9

MATHEMATIK

Theorie für Schülerinnen und Schüler

Name und Klasse

Inhaltsverzeichnis nach Themen

Arithmetik und Algebra

Geometrie

Inhaltsverzeichnis nach Lernumgebungen

Arithmetik und Algebra

Geometrie

Symbole

LU	Lernumgebung
M	Merke (Begriffe, Definitionen, Herleitungen)
R	Regeln und mathematische Sätze
⇨	Beispiele

Terme

LU 9 4, 28 9+ 3, 16, 26

Aufbau von Termen

1. Zahlen, Platzhalter und Grössen sind Terme.

⇨ 0, 4, 137, Δ, □, a, b, x, y, 2 Fr., 5 min, 7 kg, 246 m

2. Werden Terme addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert oder potenziert, so erhält man wiederum einen Term.

⇨
$4 + a$
$b - 98$
$x \cdot y$
$6 : z$
y^4
$7 \cdot (4 + c)$

3. Ist T = T‘ und ist T ein Term gemäss 1. oder 2., so heisst auch T‘ ein Term.

⇨
$b \cdot b = b^2$
$5 (a + b) = 5a + 5b$
$1 = x^0$
$a^2 - a = a (a - 1)$

Für den Begriff «Platzhalter» verwendet man auch den Begriff «Variable».

Terme ohne Variablen

Das sind Terme, die eine bestimmte Zahl darstellen.
Wenn nötig findet man diese Zahl durch Ausrechnen des Terms (schrittweises Umformen).

⇨ $109 + 15 - 12 = 124 - 12 = 112$

$8 \cdot (37 - 14) = 8 \cdot 23 = 184$

$(19 + 23) : (15 - 8) = 42 : 7 = 6$

$75 - (4 \cdot 5 + 35 : 7) = 75 - (20 + 5) = 75 - 25 = 50$

Terme mit Variablen

Das sind Terme, die keine bestimmte Zahl darstellen. Man kann sie nicht ausrechnen, sondern nur umformen.

⇨ $9y + 7y + 5y = (9 + 7 + 5)\,y = 21y$

Summe $\longrightarrow$ Produkt

$x^2 - x = x \cdot x - x \cdot 1 = x\,(x - 1)$

Differenz $\longrightarrow$ Produkt

$b^4\,(3c + 2d) = 3b^4c + 2b^4d$

Produkt $\longrightarrow$ Summe

$(a - b) \cdot 4 = 4a - 4b$

Produkt $\longrightarrow$ Differenz

Termumformungen

Die bei den Operationen in N_0 schon verwendeten Rechengesetze (Vertauschungsgesetz, Zusammenfassungsgesetz, Verteilungsgesetz, Potenzgesetze, Klammerregeln usw.) sind immer so genannte Termumformungen, wenn sie in einer gegebenen Grundmenge durchführbar sind.

⇨ $(11 - 9)^2 = 11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 + 9^2$

$7a + a^3 = a\,(7 + a^2)$

$$2(21m + 16n) - (2m + (8m + 4n)) = 42m + 32n - 2m - 8m - 4n$$
$$= 32m + 28n$$

Gauss'sche Summenformel

Die **Gauss'sche Summenformel** ist die Formel für die Summe der ersten *n* aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, also 1+2+3+4+...+*n*. Sie wird auch *arithmetische Reihe* genannt:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2}}$$

⇨ Man schreibe die Zahlen von 1 bis *n* aufsteigend in eine Zeile. Darunter schreibe man dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge (im Beispiel *n* = 10).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Es ist gut zu erkennen, dass die Summe der Spalten im Beispiel jeweils den Wert 11 ergibt. Allgemein ergibt sich ein Wert von *n* + 1. Da es *n* Spalten sind, ist die Summe der Zahlen beider Zeilen gleich $n \cdot (n + 1)$. Um nun die Summe der Zahlen *einer* Zeile zu ermitteln wird das Ergebnis halbiert und es ergibt sich die obige Summenformel:

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$$

Gleichungen mit Formvariablen

LU 9 4 9+ 3, 16

Aufbau von Gleichungen

M

$$\frac{12}{11}x + 7 = 27 \qquad \frac{14}{19}x + 9 = 23 \qquad \frac{17}{2}x + 15 = 21$$

$$\frac{12}{11}x = 20 \qquad \frac{14}{19}x = 14 \qquad \frac{17}{2}x = 6$$

$$x = \frac{20 \cdot 11}{12} \qquad x = \frac{14 \cdot 19}{14} \qquad x = \frac{6 \cdot 2}{17}$$

$$x = 18\frac{1}{3} \qquad x = 19 \qquad x = \frac{12}{17}$$

Man kann alle drei Gleichungen in gleicher Weise nach x auflösen.
Die drei Gleichungen haben alle den gleichen Aufbau.

Aufgrund dieses Vergleichs lässt sich der Aufbau (Struktur) der Gleichungen in allgemeiner Form angeben:

⇨

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\begin{array}{c} \frac{12}{11}x \\ \frac{14}{19}x \\ \frac{17}{2}x \end{array}} & + & \boxed{\begin{array}{c} 7 \\ 9 \\ 15 \end{array}} & = & \boxed{\begin{array}{c} 27 \\ 23 \\ 21 \end{array}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
a\,x & + & b & = & c
\end{array}$$

In der Gleichung $ax + b = c$ ist der Platzhalter x die Lösungsvariable; die Platzhalter a, b und c sind die Formvariablen.

Formvariable

M

Buchstaben und Zeichen, die in Gleichungen für gegebene Zahlen oder Grössen stehen, nennt man **Formvariablen**.

Formeln

Gleichungen mit Formvariablen werden in Geometrie, Rechnen, Algebra, Chemie, Physik usw. häufig als so genannte Formeln verwendet.

⇨ $A = g \cdot h \qquad z = \dfrac{K \cdot p}{100} \qquad U = R \cdot I$

Gleichungsumformungen

LU *9* 4, 6, 7 *9+* 3, 16

Äquivalenzumformung von Gleichungen

Formt man Gleichungen nach folgenden Regeln um, so entstehen äquivalente Gleichungen.

Umformung		Regel	Beispiel	
$x - a = b$ $x = b + a$	$\mid +a$	***beidseitig addieren***	$x - 6 = 12$ $x = 18$	$\mid +6$
$x + a = b$ $x = b - a$	$\mid -a$	***beidseitig subtrahieren***	$x + 4 = 12$ $x = 8$	$\mid -4$
$a \cdot x = b$ $x = b : a$	$\mid :a$	***beidseitig dividieren***	$3x = 12$ $x = 4$	$\mid :3$
$x : a = b$ $x = a \cdot b$	$\mid \cdot a$	***beidseitig multiplizieren***	$x : 5 = 3$ $x = 15$	$\mid \cdot 5$
$a \cdot x + b = c$ $ax = c - b$ $x = (c - b) : a$	$\mid -b$ $\mid :a$	***zuerst subtrahieren, dann dividieren***	$3x + 2 = 11$ $3x = 9$ $x = 3$	$\mid -2$ $\mid :3$
$x : a - b = c$ $x : a = c + b$ $x = a\,(b + c)$	$\mid +b$ $\mid \cdot a$	***zuerst addieren, dann multiplizieren***	$x : 4 - 2 = 6$ $x : 4 = 8$ $x = 32$	$\mid +2$ $\mid \cdot 4$
$a - x = b$ $-x = b - a$ $x = -(b - a)$	$\mid -a$ $\mid \cdot (-1)$	***zuerst subtrahieren, dann mit (–1) multiplizieren***	$7 - x = 4$ $-x = -3$ $x = 3$	$\mid -7$ $\mid \cdot (-1)$
$x + a = b - x$ $2x + a = b$ $2x = b - a$ $x = (b - a) : 2$ $x = \frac{b - a}{2}$	$\mid +x$ $\mid -a$ $\mid :2$	***zuerst alle Glieder mit x zusammenfassen, dann x isolieren***	$x + 8 = 6 - x$ $2x + 8 = 6$ $2x = -2$ $x = -1$	$\mid +x$ $\mid -8$ $\mid :2$

Vertauschungsgesetz

$x \cdot a = a \cdot x = ax$ $\qquad$ $x \cdot 5 = 5 \cdot x = 5x$

Umformungen von Bruchgleichungen

LU 9 9+ 16

Äquivalenzumformungen von Bruchgleichungen

M Formt man Gleichungen nach folgenden Regeln um, so entstehen äquivalente Gleichungen.

$\frac{a}{x} + b = c \quad \vert \cdot x$	***mit Hauptnenner multiplizieren***	$\frac{8}{x} + 14 = 18 \quad \vert \cdot x$
$\frac{a \cdot x}{x} + bx = cx$	***kürzen***	$\frac{8 \cdot x}{x} + 14x = 18x \quad \vert -14x$
$a + bx = cx \quad \vert -bx$ $a = cx - bx$	***Variable isolieren***	$8 + 14x = 18x$ $8 = 4x \quad \vert :4$
$a = x(c-b) \quad \vert :(c-b)$	***Variable ausklammern***	$\underline{\underline{2 = x}}$
$\underline{\underline{\frac{a}{c-b} = x}}$		

$\frac{a}{2x} - \frac{b}{x} = c \quad \vert \cdot 2x$	***mit Hauptnenner multiplizieren***	$\frac{27}{2x} - \frac{2}{x} = 11{,}5 \quad \vert \cdot 2x$
$\frac{a \cdot 2x}{2x} - \frac{b \cdot 2x}{x} = c \cdot 2x$	***kürzen***	$\frac{27 \cdot 2x}{2x} - \frac{2 \cdot 2x}{x} = 11{,}5 \cdot 2x$
$a - 2b = 2cx \quad \vert \cdot 2x$ $\underline{\underline{\frac{a-2b}{2c} = x}}$	***Variable isolieren***	$27 - 4 = 23x \quad$ TU $23 = 23x \quad \vert :23$ $\underline{\underline{1 = x}}$

Lineare Funktionen

LU 9 2, 3, 10, 14, 24 9+ 2, 4, 13

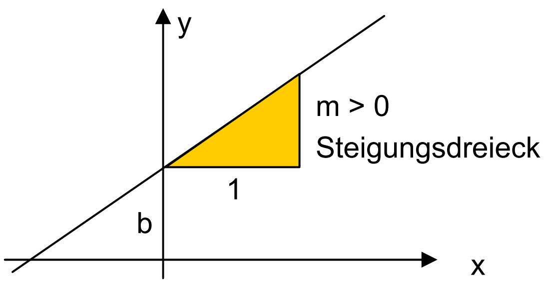
Funktionsgleichungen

Allgemeine Form: $ax + by + c = 0$

Normalform: $y = mx + b$

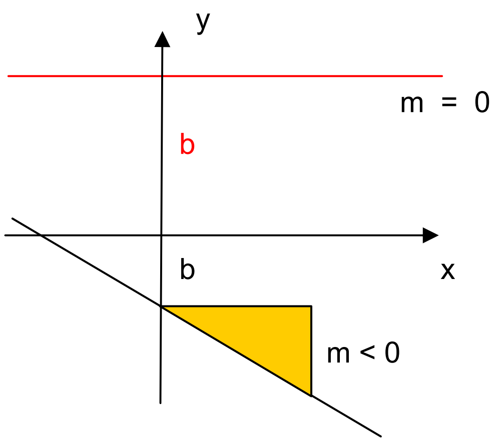
m: Steigungsfaktor

$m > 0$	Die Gerade steigt.
$m < 0$	Die Gerade fällt.
$m = 0$	Die Gerade verläuft parallel zur x-Achse.



b: y-Achsenabschnitt

$b > 0$	Die Gerade schneidet die positive y-Achse.
$b < 0$	Die Gerade schneidet die negative y-Achse.
$b = 0$	Die Gerade ist Ursprungsgerade.



Lösen von Funktionsgleichungen

⇨ 1. Für die folgende Wertetabelle findet man eine Funktionsgleichung von der Form $y = ax + b$.

steigend →

x	2	8	19	25
y	16	34	67	85

steigend →

Gleichung ① $16 = 2a + b$

Gleichung ② $34 = 8a + b$ ⇔ $b = 34 - 8a$

② in ① ⇒ $16 = 2a + 34 - 8a$

$6a = 18$ $\qquad b = 34 - 8 \cdot 3$

$a = 3$ $\qquad b = 10$

$$\Rightarrow \mathbf{y = 3x + 10}$$

⇨ 2. Für die folgende Wertetabelle findet man eine Funktionsgleichung von der Form $y = \frac{a}{x} + b$.

steigend →

x	4	6	10	16
y	5	$4\frac{1}{3}$	3,8	3,5

fallend →

Gleichung ① $5 = \frac{a}{4} + b$

Gleichung ② $3{,}5 = \frac{a}{16} + b$ ⇔ $b = 3{,}5 - \frac{a}{16}$

② in ① ⇒ $5 = \frac{a}{4} + 3{,}5 - \frac{a}{16}$

$1{,}5 = \frac{3a}{16}$ $\qquad b = 3{,}5 - \frac{8}{16}$

$24 = 3a$

$8 = a$ $\qquad b = 3$

$$\Rightarrow \mathbf{y = \frac{8}{x} + 3}$$

Wachstums- und Zerfallprozesse

LU *9* 24 *9 +* 17, 31

Wachstumsprozesse

Gleich bleibende prozentuale Zunahme/Abnahme

$$\boxed{Wn = W_0 \cdot (1 \pm \frac{p}{100})^n}$$

W_0 Anfangswert

W_n Endwert nach n Beobachtungszeiträumen

n Anzahl der Beobachtungszeiträume

Wachstumsfaktor progressiv $q = 1 + \frac{p}{100}$

degressiv $q = 1 - \frac{p}{100}$

Zerfallsprozesse

Radioaktiver Zerfall

$$\boxed{N_t = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^t} \qquad t = \frac{T}{T_{\frac{1}{2}}}$$

N_0 Anfangswert
N_t Endwert
t Anzahl der Halbwertszeiten im Beobachtungszeitraum
T Zeitdauer des gesamten Beobachtungszeitraumes
$T_{\frac{1}{2}}$ Halbwertszeit

Jährlicher Abnahmefaktor beim radioaktiven Zerfall

$$\boxed{N_t = N_0 \cdot q^t} \qquad q = \sqrt[T_{\frac{1}{2}}]{0,5}$$

N_0 Anfangswert
N_t Endwert
t Zahl der Jahre
q jährlicher Abnahmefaktor
$T_{\frac{1}{2}}$ Halbwertszeit

Wahrscheinlichkeit

LU 9 13 9 + 12

Zufall	Im Alltag haben wir oft mit Vorgängen zu tun, die wir als **zufällig** oder als **vom Zufall abhängig** bezeichnen. In der Umgangssprache benutzen wir Attribute wie **unwahrscheinlich** oder **höchstwahrscheinlich**. Solche qualitativen Ausdrücke sind jedoch für mathematische Berechnungen kaum verwendbar. Brauchbar sind dagegen zahlenmässige (quantitative) Bewertungen von Zufallsgeschehen.
Chance	Geben wir einem Ergebnis, z.B. bei einem Pferderennen, eine **Chance** von 1 zu 4, dann beschreiben wir damit das Verhältnis, in dem wir bereit sind, zugunsten eines bestimmten Ereignisses zu wetten. Es kann verschiedene Wege geben, um zur Einschätzung von solchen Quoten zu kommen: Man lässt sich von seinem Gefühl und seiner persönlichen Erfahrung leiten, schätzt also subjektiv die Chancen ein (z.B. beim Pferderennen). Man hat den Vorgang bereits oft beobachtet und Erfahrungswerte gesammelt, wagt deshalb eine Prognose, in der Gewissheit, dass es auch anders kommen kann (z.B. bei Wettervorhersagen). Man kann aufgrund z.B. physikalischer oder geometrischer Gegebenheiten die Chancen ablesen (z.B. beim Glücksrad). Chancen sind Zahlenverhältnisse Man vergleicht die Anzahl der Ergebnisse, die für uns günstig sind (kurz: *Anzahl der günstigen Ergebnisse*) mit der Anzahl der Ergebnisse, die für uns nicht günstig sind (kurz: *Anzahl der ungünstigen Ergebnisse*).
Wahrscheinlichkeit	In der Mathematik ist es nun üblich, statt dieses Zahlenverhältnisses das Folgende zu betrachten. Man spricht dann allerdings nicht von der Chance für einen Gewinn, sondern von der Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn. $\text{Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn} = \dfrac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$ Wahrscheinlichkeiten beschreiben also den Anteil der günstigen Ergebnisse an den möglichen Ergebnissen. Einen solchen Anteil kann man als Bruchzahl, Dezimalzahl oder in Prozent angeben: ⇨ $\dfrac{3}{10} = 0{,}3 = 30\ \%$

Gewinn-chancen	Auf Glücksspiele sollte man sich nur dann einlassen, wenn man die **Gewinnchancen** abschätzen kann. ⇨ Ein Würfel wird geworfen. Man gewinnt, wenn die Augenzahl 3 fällt. Wenn der Würfel nicht gezinkt oder ungleichmässig beschaffen ist und ordentlich gewürfelt wird, schätzen wir unsere Chancen auf *1 zu 5* ein, da auf *einer* Seitenfläche die Augenzahl 3, auf *fünf* Seitenflächen eine andere Augenzahl eingetragen ist. Wahrscheinlichkeit für Augenzahl 3: $P(3) = \frac{\text{Anzahl der Flächen mit Augenzahl 3}}{\text{Anzahl aller Flächen}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 = 16{,}7\ \%$ Alle Vorgänge, bei denen die Ergebnisse vom Zufall abhängen, bezeichnet man als **Zufallsversuche**.
Ergebnisraum	Solche Zufallsversuche beschreiben wir • durch die Ergebnisse, die auftreten können. • durch die Wahrscheinlichkeiten, die wir jedem Ergebnis zuweisen. ⇨ Die Menge S aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsversuchs nennt man **Ergebnisraum**. Beim Würfeln interessiert die Augenzahl. Daher betrachtet man den Ergebnisraum S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Der Begriff Ergebnis wird umgangssprachlich in verschiedenen Bedeutungen benutzt: Meistens verwendet man ihn synonym zu *Resultat* (im Sinne von Rechenergebnis) oder zu *Abschluss* (im Sinne von Verhandlungsergebnis oder Ergebnis eines Denkprozesses).
Ereignisse	Oft interessiert man sich für das Eintreten bestimmter Ereignisse. **Ereignisse** sind Aussagen über die Ergebnisse eines Vorganges, die man auch in Mengenschreibweise angeben kann. Ergebnisse lassen sich zu Ereignissen zusammenfassen. ⇨ Wir betrachten den Zufallsversuch «Ziehen einer Jasskarte». Zum Ereignis E: *«Die Karte ist ein As»* gehören die Ergebnisse: Schellen As, Eicheln As, Rosen As und Schilten As. Diese Ergebnisse fasst man zu einer Menge zusammen: E = { Schellen As, Eicheln As, Rosen As und Schilten As} Das **Ereignis E** lässt sich also durch eine Menge von Ergebnissen (Ergebnismenge) beschreiben.

Sonderfälle von Ereignissen

Beim Würfeln kann keine Augenzahl auftreten, die grösser ist als 6:
Das Ereignis Augenzahl 7 ist ein **unmögliches Ereignis**.
Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist 0 (0 %). Die zugehörige Ergebnismenge ist leer.

Andererseits ist jede Augenzahl kleiner als 7:
Das Ereignis Augenzahl kleiner als 7 ist ein **sicheres Ereignis**.
Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist 1 (100 %). Die zugehörige Ergebnismenge stimmt mit dem Ergebnisraum S überein.
Also gilt:

Wahrscheinlichkeiten sind Zahlen zwischen 0 und 1,
das unmögliche Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 0,
das sichere Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1.

Zufallsversuche, wie wir sie beim Würfeln kennen gelernt haben, tragen einen besonderen Namen: LAPLACE-Versuche.
Bei diesen räumt man allen Ergebnissen die gleiche Chance ein.
Daher lässt sich die Wahrscheinlichkeit P (E) eines Ereignisses E nach folgender Regel angeben:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Relative Häufigkeit

Wenn ein Vorgang mit zufälligem Ergebnis n-mal wiederholt wird und dabei genau k-mal ein bestimmtes Ergebnis A beobachtet wird, so heisst der Wert k/n die **relative Häufigkeit** des Ereignisses A bezüglich dieser Versuchsreihe.

⇨ In einer Urne befinden sich viele rote und weisse Kugeln.
Es wird 100mal eine Kugel gezogen, die entsprechende Farbe notiert und dann wieder zurückgelegt. Nehmen wir an, es wurde dabei 23mal eine rote und 77mal eine weisse Kugel gezogen.
Die relative Häufigfkeit des Ergebnisses «rot» beträgt dann also 23/100= 0.23.

*Die **relative Häufigkeit eines Ereignisses** ist gleich der Summe der relativen Häufigkeiten der Ergebnisse, die für das Ereignis günstig sind.*

Landesindex

Die Entwicklung von Preisen, Löhnen, Bedarfsgütern, aber auch von Arbeiterzahlen usw. spielt im Erwerbsleben eine grosse Rolle.

Um solche Zahlenentwicklungen sinnvoll miteinander vergleichen zu können, hat man unter anderem den Landesindex der Konsumentenpreise LIK geschaffen. Er ist eine Verhältniszahl, die sich auf eine festgelegte Basis 100 bezieht.

⇨ Im September 1966 kostete 1 kg Brot noch –.85 Fr. Im Januar 1973 kostete 1 kg Brot 1.65 Fr. Der Brotpreis 1966 entspricht dem Index 100, der Preis 1973 entspricht dem Index 194,1, denn die Zunahme von Preis und Index ist proportional.

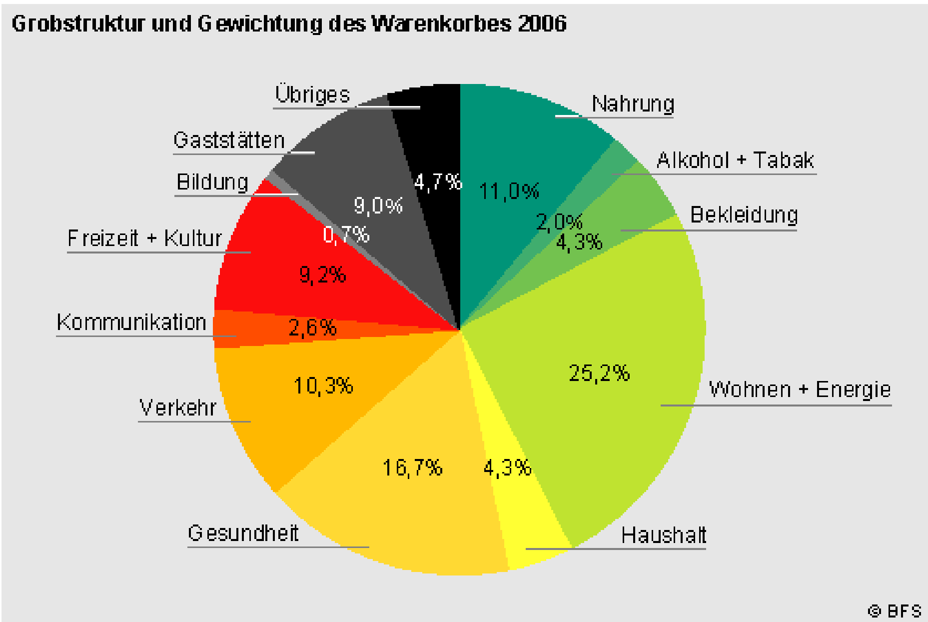
Der LIK wird regelmässig revidiert und bei dieser Gelegenheit jeweils auf eine neue Indexbasis (=100 Punkte) gestellt. Die alten Indexreihen werden rechnerisch mit der neuen Indexreihe verknüpft und so weitergeführt.

Basis Dezember 2005 = 100

Ein Grund für eine Indexrevision liegt darin, dass die Bedeutung der einzelnen Bedarfsgüter sich verändert.

Die Gewichtung der zwölf Ausgabenbereiche der privaten Haushalte wird jährlich revidiert.

Warenkorb



Teuerung

Sie kann immer nur für einen ganz bestimmten Zeitraum berechnet werden und sie ist abhängig von der Indexbasis, sie ist darum immer eine relative Grösse.

Fehlerrechnung

LU 9 15 9 + 18

Genauigkeit	Bei der Angabe von Messwerten gibt die letzte Stelle die Genauigkeit an. Hier haben auch die Nullen am Ende einer Zahl eine Bedeutung. Als gültige Ziffern bezeichnet man die Anzahl Ziffern von der ersten Wertziffer ≠ 0 bis zur Ziffer an der letzten Stelle. Ein Wechsel der Einheit hat keinen Einfluss auf die Anzahl der gültigen Ziffern. ⇨ *Beispiele «auf Zentimeter genau»* drei gültige Ziffern: 249 cm = 24,9 dm = 2,49 m zwei gültige Ziffern: 70 cm = 7,0 dm = 0,70 m
Absoluter Fehler	Der **absolute Fehler** gibt die Differenz des abgelesenen Messwertes (Istwert) zum tatsächlichen Wert (Sollwert) an. Der absolute Fehler allein sagt aber wenig aus über die Präzision einer Messung. ⇨ Wenn z.B. auf Millimeter genau gemessen wird und der Messwert zwischen 8,3 cm und 8,4 cm liegt, kann man ihn mit 8,35 cm angeben. Allerdings gehört dann die Angabe ± 0,05 cm («absoluter Fehler») dazu, weil sonst eine Präzision von einem Hundertstelzentimeter vorgetäuscht würde.
Relativer Fehler	Der **relative Fehler** ist das Verhältnis (Quotient) des absoluten Fehlers zum Sollwert (Messwert). Er stellt somit die prozentuale Abweichung des gemessenen Wertes vom Sollwert dar. $\boxed{\text{relativer Fehler} = \dfrac{\text{absoluter Fehler}}{\text{Messwert}}}$ ⇨ Messwert: 0,8 cm absoluter Fehler: 0,05 cm relativer Fehler: $\dfrac{0{,}05}{0{,}8} = 6{,}25\ \%$
Faustregeln	Wenn eine Addition/Subtraktion mit Näherungswerten durchgeführt wird, dann soll das Endergebnis nur auf so viele Stellen (vor oder nach dem Komma) gerundet werden, wie der ungenaueste Summand Stellen aufweist. Wenn eine Multiplikation/Division mit Näherungswerten durchgeführt wird, dann soll das Endergebnis nur so viele Ziffern enthalten wie der Messfaktor mit den wenigsten gültigen Ziffern.

Abzahlung

LU 9 20 9 +

Abzahlung	M Wer eine Ware kauft, zahlt in der Regel bar. Es ist aber auch möglich, in vertraglich vereinbarten nachträglichen Raten zu zahlen. Oft muss dabei ein bestimmter Betrag als *Anzahlung* geleistet werden. Das Abzahlungsgeschäft dient in erster Linie dem Verkäufer. (→ Umsatzförderung!) Mit dem Eigentumsvorbehalt behält der Verkäufer das Eigentum, bis die letzte Rate bezahlt ist. Zum Schutz des Käufers unterliegt der Abzahlungsvertrag strengen Bedingungen. Zum Beispiel kann jeder Abzahlungsvertrag innert 5 Tagen nach Abschluss widerrufen werden.
Begriffe und Formvariablen	M B : Barpreis in Fr. A : Anzahlung in Fr. K : Kreditsumme in Fr. ⇒ $K = B - A$ R : Rate pro Monat in Fr. n : Anzahl Raten $n \cdot R$: Summe der Raten in Fr. z : Teilzahlungszuschlag in Fr. ⇒ $z = n \cdot R - (B - A)$ K_m : aufgenommener Kredit pro Monat in Fr. ⇒ $K_m = \frac{B - A}{n}$ p : Zinssatz in % für die Kreditkosten, umgerechnet auf 1 Jahr!!!
Grundschema	R Das Grundschema für Berechnungen sieht wie folgt aus: Barpreis – Anzahlung Kreditsumme + Teilzahlungszuschlag = Summe der Raten

Formeln

Teilzahlungszuschlag	z	$= n \cdot R - (B - A) = n \cdot R - K$
Anzahlung	A	$= B + z - n \cdot R$
Barpreis	B	$= A + n \cdot R - z$
Rate	R	$= \dfrac{(B - A) + z}{n} = \dfrac{K + z}{n}$

Damit nun der Käufer sieht, wie teuer ihn ein Abzahlungsgeschäft wirklich zu stehen kommt, muss er den Zuschlag in Form eines Jahreszinssatzes ausdrücken können.

$$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12 \cdot 2}{K \cdot (n+1)} = \frac{z \cdot 2400}{K \cdot (n+1)}$$
$$= \frac{(n \cdot R - K) \cdot 2400}{K \cdot (n+1)}$$

Beispiel

Berechne den Zinssatz p für den Kauf einer Steroanlage, die zu einem Barpreis von 1075 Fr. oder mit 11 Raten zu monatlich 75 Fr. nach einer Anzahlung von 300 Fr. angeboten wird.

Gegeben
Barpreis in Fr.: $B = 1075$
Anzahl Raten: $n = 11$
Anzahlung in Fr.: $A = 300$
Rate in Fr.: $R = 75$

Gesucht
Zinssatz in %: p

$$p = \frac{z \cdot 2400}{(B - A) \cdot (n+1)} = \frac{(n \cdot R - B + A) \cdot 2400}{(B - A) \cdot (n+1)}$$
$$= \frac{(11 \cdot 75 - 1075 + 300) \cdot 2400}{(1075 - 300) \cdot (11+1)}$$
$$= \frac{50 \cdot 2400}{775 \cdot 12} = 12{,}9032\ldots$$

Der Zinssatz beträgt rund **12,9 %**.

Kleinkredit

LU 9 20 9 +

Kleinkredit	Kleinkredite sind Darlehen von relativ geringer Höhe, die in regelmässigen, meist monatlichen Raten, die im Voraus bestimmt werden, zurückgezahlt werden müssen. Von Banken oder anderen Kreditinstituten werden in Inseraten und durch Prospekte so genannte Kleinkredite, Barkredite oder Privatkredite angeboten.
Begriffe und Formvariablen	⇨ K : Kreditbetrag in Fr. z : Kreditkosten in Fr. (Zinsen, Risikoprämie, Spesen usw.) $K + z$: zurückzuzahlende Summe in Fr. n : Anzahl Raten $R = \frac{K+z}{n}$ Monatsrate in Fr. $K_m = \frac{K}{n}$ aufgenommener Kredit pro Monat in Fr. p : Zinssatz in % für die Kreditkosten, umgerechnet auf 1 Jahr !!!
Grundschema	Das Grundschema für Berechnungen sieht wie folgt aus: Kreditbetrag + Kreditkosten = zurückzuzahlende Summe
Formeln	$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12 \cdot 2}{K \cdot (n+1)} = \frac{z \cdot 2400}{K \cdot (n+1)} = \frac{(n \cdot R - K) \cdot 2400}{K \cdot (n+1)}$

Dualsystem – Binärzahlen

LU 9 32 9 + 36

Dual-System
(Zweier-System)

Das Dual-System oder auch Binär-System verwendet die Zahl 2 als Basis und benützt nur die beiden Ziffern **0** und **1**.

Computer arbeiten auf dieser Grundlage.

Umrechnung Dezimal in Dual

Die Dezimalzahl wird fortlaufend durch die Zahl 2 dividiert. Die Reste jedes Divisionsschrittes ergeben in umgekehrter Reihenfolge die Dualzahl.

Dezimalzahl 38

38	:	2	=	19	Rest 0
19	:	2	=	9	Rest 1
9	:	2	=	4	Rest 1
4	:	2	=	2	Rest 0
2	:	2	=	1	Rest 0
1	:	2	=	0	Rest 1

Dualzahl von 38 = 1 0 0 1 1 0

Kurzschreibweise: $38 = 100110_{2}$

Umrechnung Dual in Dezimal

*Im Dual-System sind die Stellenwerte die **Potenzen der Basis 2**.*

Dualzahl $1\,0\,0\,1\,1\,0_{2}$
(gesprochen: „eins, null, null, eins, eins, null im Zweier-System“)

⇨ 1 0 0 1 1 0

$$1 \cdot \mathbf{2^5} + 0 \cdot \mathbf{2^4} + 0 \cdot \mathbf{2^3} + 1 \cdot \mathbf{2^2} + 1 \cdot \mathbf{2^1} + 0 \cdot \mathbf{2^0}$$

$$32 + 0 + 0 + 4 + 2 + 0 = 38$$

Strahlensätze

LU 9 5 9+ 5, 24

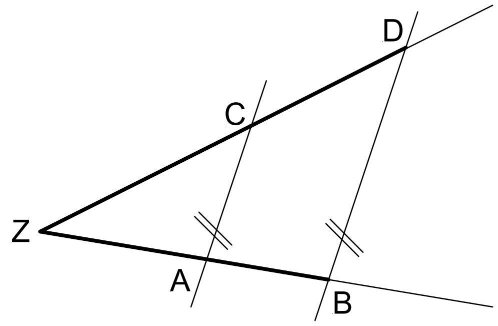
1. Strahlensatz

M Die Strecken liegen auf den beiden Halbgeraden.

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

R $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}$

$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{CD}}$



M Werden die Schenkel eines Winkels von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich irgend zwei Abschnitte auf dem einen Schenkel wie die entsprechenden Abschnitte auf dem andern Schenkel.

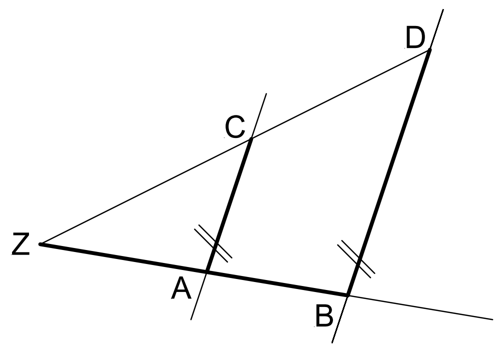
2. Strahlensatz

M Die Strecken liegen auf einer Halbgeraden und den beiden Parallelen.

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

R $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$

$\frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$

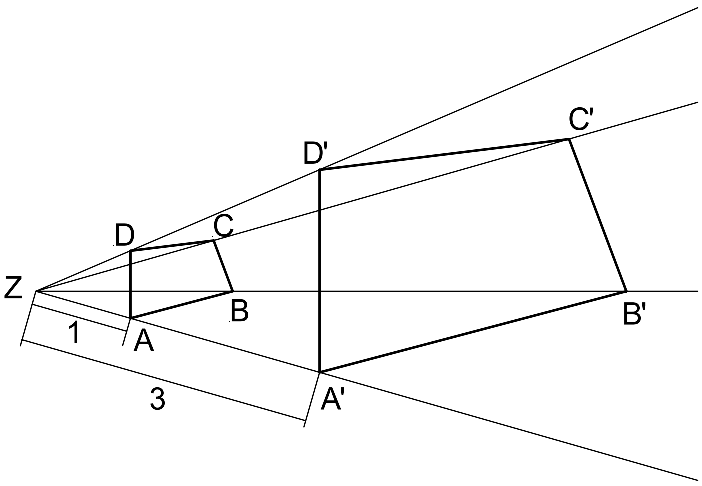


M Werden die Schenkel eines Winkels von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die zugehörigen Abschnitte auf einem Schenkel vom Scheitelpunkt aus gemessen.

Zentrische Streckung/Ähnlichkeit

LU 9 5 9 + 5, 24

Festlegung



Eine zentrische Streckung ist festgelegt durch das Streckungszentrum Z und den Streckungsfaktor k.

Jeder Bildpunkt liegt auf einer Geraden durch den Originalpunkt und das Zentrum Z.

Der Streckungsfaktor k bestimmt die Entfernung des Bildpunktes vom Streckungszentrum Z.

$$k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$$

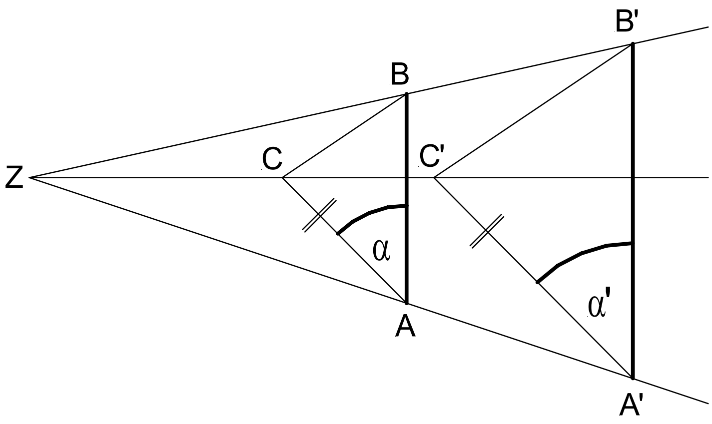
⇨ $k = \frac{3}{1}$

Jede Strecke wird auf eine k-mal so lange Bildstrecke abgebildet.

$\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$

⇨ $\overline{A'B'} = 3 \cdot \overline{AB}$

Strecken und Winkel



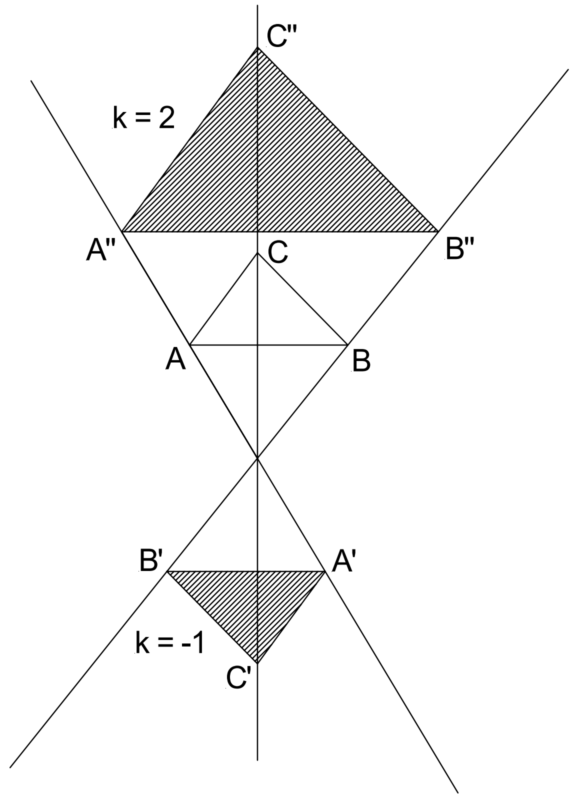
Jede Strecke wird auf eine zu ihr parallele Bildstrecke abgebildet.

$\overline{A'B'}$ // $\overline{AB}$

Jeder Winkel wird auf einen gleich grossen Bildwinkel abgebildet.

$\alpha = \alpha'$

Streckungs-faktor k

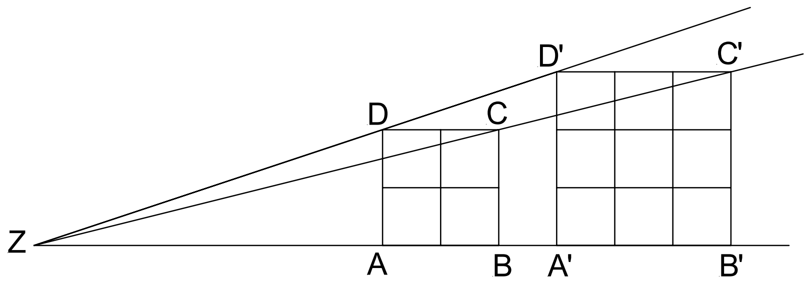


Bedeutung des Streckungs-faktors

k > 1 Vergrösserung
k < 1 Verkleinerung
k = 1 identische Abbildung

k = -1 Punktspiegelung

Flächeninhalte

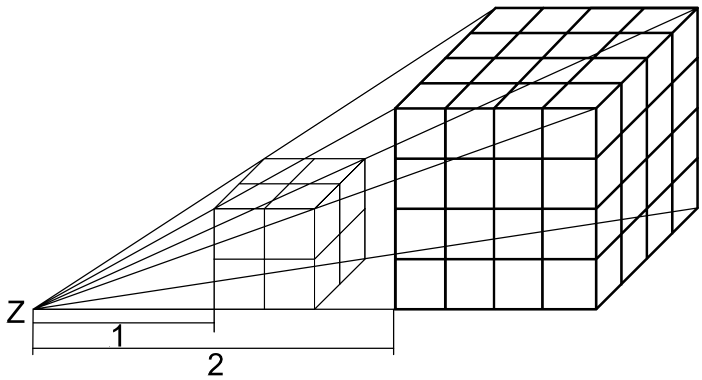


In ähnlichen Figuren ist der Flächeninhalt der Bidfigur genau k^2mal so gross wie der Flächeninhalt der Originalfigur.

$$A_{\text{Bildfigur}} = k^2 \cdot A_{\text{Originalfigur}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{\text{Bildfigur}}}{A_{\text{Originalfigur}}} = k^2$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\overline{ZA'}}{ZA} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{\text{Bildfigur}}}{A_{\text{Originalfigur}}} = \frac{9}{4}$$

Rauminhalte



In ähnlichen Figuren ist das Volumen der Bildfigur genau k^3mal so gross wie das Volumen der Originalfigur.

$$V_{\text{Bildfigur}} = k^3 \cdot V_{\text{Originalfigur}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{\text{Bildfigur}}}{A_{\text{Originalfigur}}} = k^3$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\overline{ZA'}}{ZA} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad k^3 = \frac{8}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{\text{Bildfigur}}}{A_{\text{Originalfigur}}} = \frac{8}{1}$$

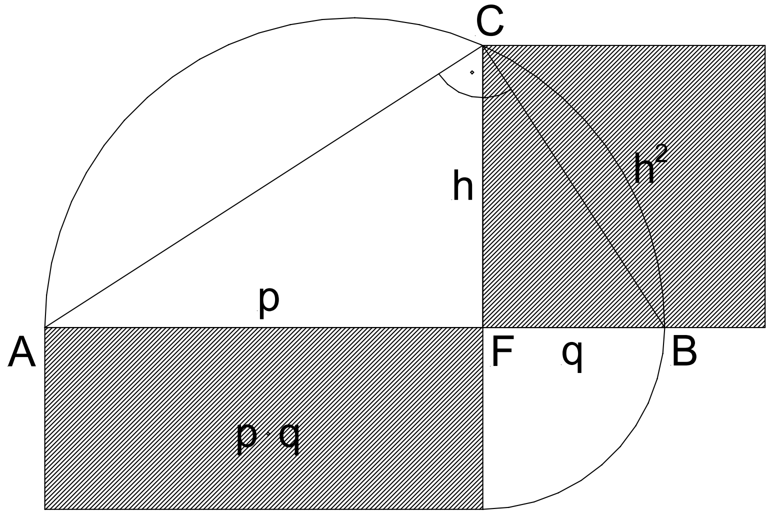
Höhensatz

LU

9 9 + 5

Höhensatz

M



$$\Delta\, AFC \sim \Delta\, BCF \Rightarrow p : h = h : q$$

R

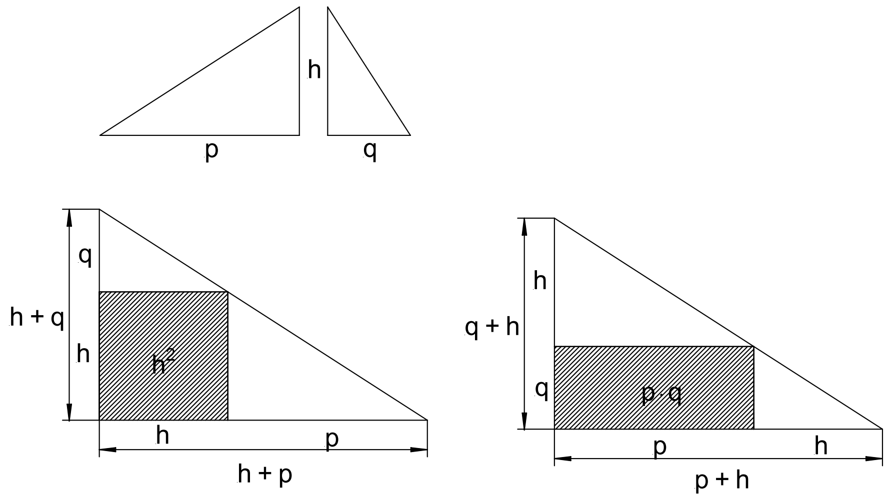
$$h^2 = p \cdot q$$

$$h = \sqrt{p \cdot q}$$

M

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe h flächengleich dem Rechteck aus den Hypothenusenabschnitten p und q.

Beweis zum Höhensatz



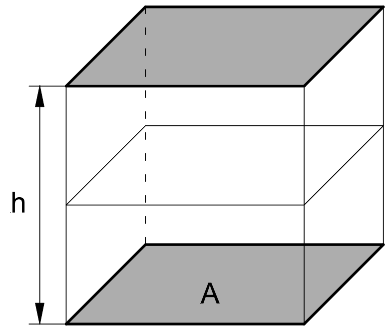
Prismen und Zylinder

LU 9 6, 16 9+ 15

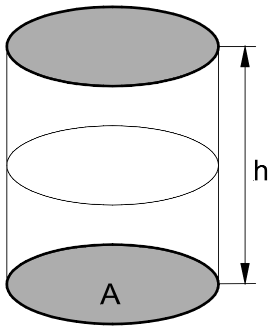
Begriffe

Quader
Zylinder

Verschiebt man die Fläche A eines Rechtecks oder eines Kreises senkrecht (orthogonal) um die Strecke h, so erhält man einen **Quader** oder einen **Zylinder**.



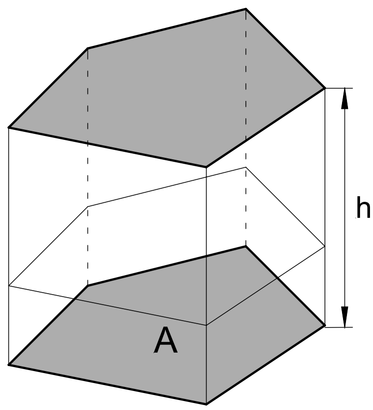
Quader



Zylinder

Prisma

Verschiebt man die Fläche A eines beliebiges Vielecks senkrecht (orthogonal) um die Strecke h, so erhält man ein senkrechtes **Prisma.** **Würfel** und **Quader** sind spezielle Formen des senkrechten Prismas.



Formeln

Prismen
Zylinder

Das Volumen aller Prismen und Zylinder lässt sich mit folgender Formel berechnen:

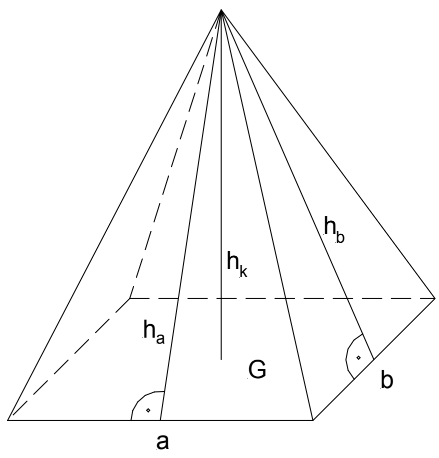
Volumen = Grundfläche · Höhe

$V = G \cdot h$

Pyramiden

LU 9 6, 7, 8, 16, 17 9+ 6, 7, 19

Rechteckige Pyramide



$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_k$

$O = G + M$

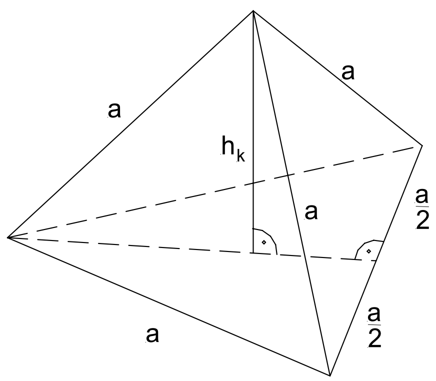
Bei einer rechteckigen Pyramide gilt:

$O = a \cdot b + 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2}$

Bei einer quadratischen Pyramide gilt: $a = b$

$O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$

Tetraeder



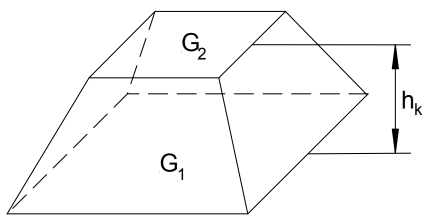
Die Oberfläche eines Tetraeders besteht aus vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken.

$h_k = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6}$

$V = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2}$

$O = a^2 \cdot \sqrt{3}$

Pyramiden-stumpf



G_1 : Grundfläche
G_2 : Deckfläche

$V = \frac{h_k}{3} \cdot \left(G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2\right)$

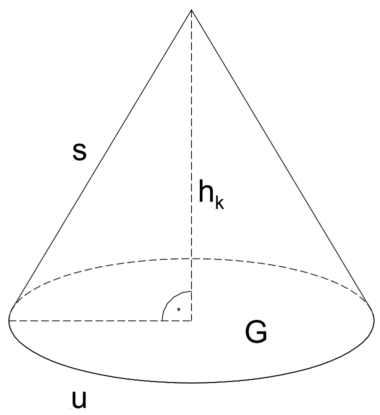
$O = G_1 + G_2 + M$

Kegel

LU 9 6, 16 9 + 14

Volumen

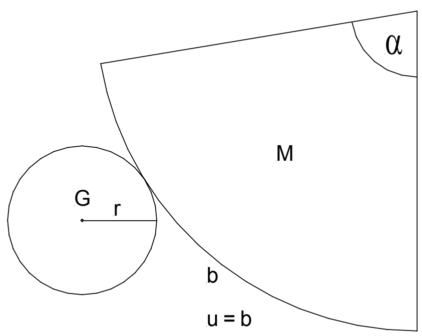
R



$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_k$$

Mantel
Oberfläche

R



$$M = r \cdot \pi \cdot s = \frac{s^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}$$

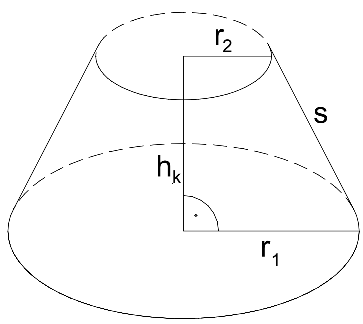
$$O = G + M$$

$$O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s = r \cdot \pi \cdot (r + s)$$

$$\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360°$$

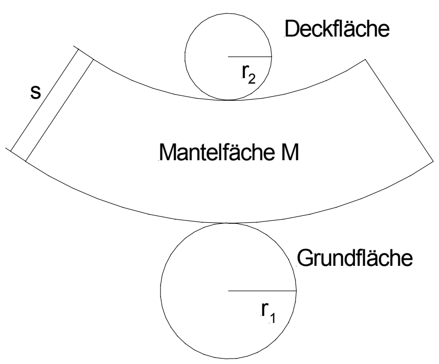
Kegelstumpf
Volumen

R



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_k \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$$

Kegelstumpf
Oberfläche



$$M = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$$

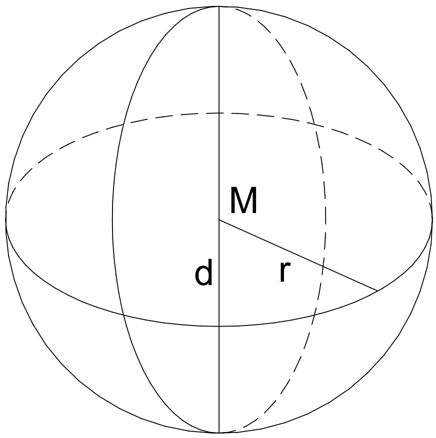
$$O = r_1^2 \cdot \pi + r_2^2 \cdot \pi + M$$

$$O = \pi \cdot [r_1^2 + r_2^2 + s \cdot (r_1 + r_2)]$$

Kugel

LU *9* 7, 16 *9 +* 7, 15

Volumen
Oberfläche



$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

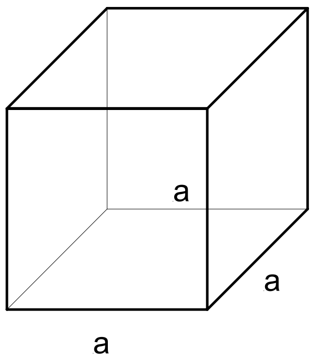
$$V = \frac{1}{6} \cdot d^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r \cdot \pi$$

$$O = d^2 \cdot \pi$$

Formelsammlung Körper

Würfel



Volumen

$V = a^3$

Grundfläche

$A = a^2$

Mantel

$M = 4 \cdot a^2$

Oberfläche

$O = 6 \cdot a^2$

Kantenlänge

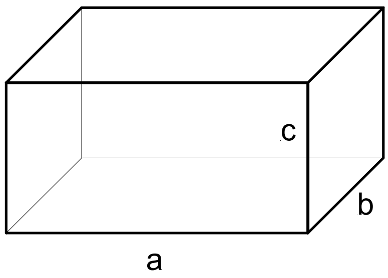
$a = \sqrt[3]{V}$

$a = \sqrt{A}$

$a = \sqrt{\frac{M}{4}}$

$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$

Quader



Volumen

$V = a \cdot b \cdot c$

Mantel

$M = 2(a \cdot c + b \cdot c)$

Oberfläche

$O = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

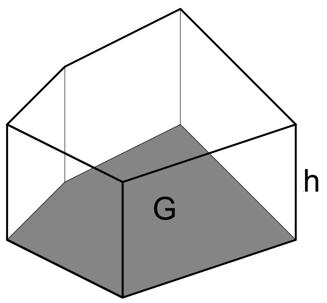
Kantenlänge

$a = \frac{V}{b \cdot c}$

$b = \frac{V}{a \cdot c}$

$c = \frac{V}{a \cdot b}$

Prisma



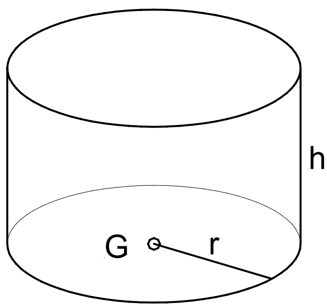
Volumen

$V = G \cdot h$

Oberfläche

$O = 2 \cdot G + M$

Zylinder



Volumen

$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$

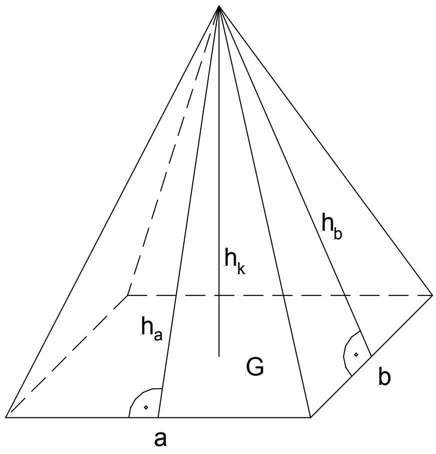
Oberfläche

$O = 2 \cdot G + M$

$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$
$\quad = 2 \cdot r \cdot \pi\ (r + h)$

Formelsammlung Körper

Pyramide



Volumen

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_k$

Oberfläche

$O = G + M$

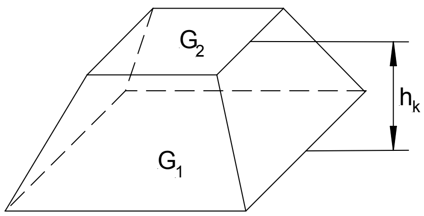
Bei einer rechteckigen Pyramide gilt:

$O = a \cdot b + 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2}$

Bei einer quadratischen Pyramide gilt: $a = b$

$O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$

Pyramiden-stumpf



G_1 : Grundfläche
G_2 : Deckfläche

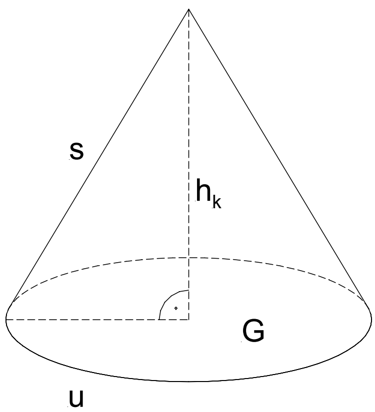
Volumen

$V = \frac{h_k}{3} \cdot \left(G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2\right)$

Oberfläche

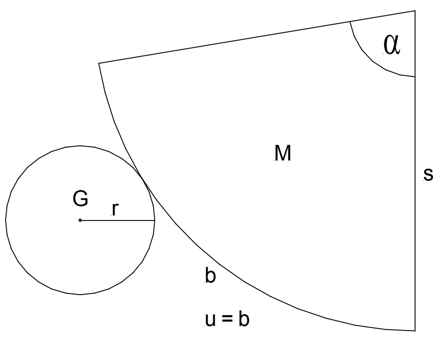
$O = G_1 + G_2 + M$

Kegel



Volumen

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_k$



Mantel/Oberfläche

$M = r \cdot \pi \cdot s = \frac{s^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}$

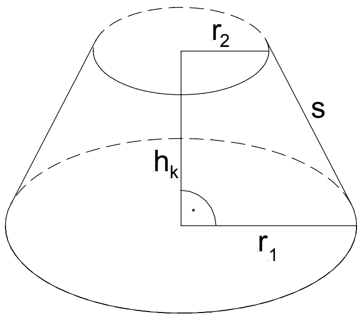
$O = G + M$

$O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s = r \cdot \pi \cdot (r + s)$

$\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360°$

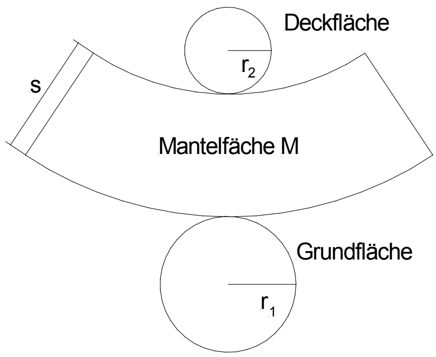
Formelsammlung Körper

Kegelstumpf



Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_k \cdot \left(r_1^{\,2} + r_1 \cdot r_2 + r_2^{\,2}\right)$$



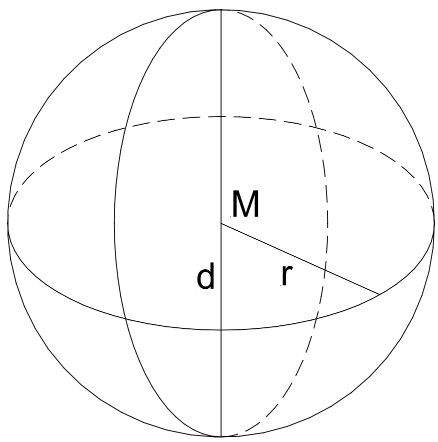
Oberfläche

$$M = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$$

$$O = r_1^{\,2} \cdot \pi + r_2^{\,2} \cdot \pi + M$$

$$O = \pi \cdot [r_1^{\,2} + r_2^{\,2} + s \cdot (r_1 + r_2)]$$

Kugel



Volumen

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot d^3 \cdot \pi$$

Oberfläche

$$O = 4 \cdot r^{\,2} \cdot \pi$$

$$O = d^2 \cdot \pi$$

Anhang

Mathematische Zeichen

$+$	plus	$\in$	ist Element aus
$-$	minus	$\notin$	ist kein Element aus
$\cdot$ (*)	mal	$\cap$	geschnitten mit
: (/)	durch	$\cup$	vereinigt mit
$=$	gleich	$\subset$	ist Teilmenge von
$\neq$	nicht gleich (ungleich)	{ }	leere Menge
$\equiv$	identisch	T	Term
$\approx$	ungefähr	N	Menge der natürlichen Zahlen
∞	unendlich	Z	Menge der ganzen Zahlen
$<$	kleiner als	Q	Menge der rationalen Zahlen
$>$	grösser als	B	Menge der Bruchzahlen
$\leq$	kleiner oder gleich	$\perp$	rechtwinklig
$\geq$	grösser oder gleich	$\parallel$	parallel
$\Rightarrow$	daraus folgt		
$\Leftrightarrow$	ist äquivalent mit		
$\sqrt{}$	Wurzel		

Vorsatzzeichen

Zeichen	Vorsatz	Bedeutung	Faktor
T	Tera	Billionenfach	10^{12}
G	Giga	Milliardenfach	10^{9}
M	Mega	Millionfach	10^{6}
k	Kilo	Tausendfach	10^{3}
h	Hekto	Hundertfach	10^{2}
da	Deka	Zehnfach	10^{1}
d	Dezi	Zehntel	10^{-1}
c	Zenti	Hundertstel	10^{-2}
m	Milli	Tausendstel	10^{-3}
μ	Mikro	Millionstel	10^{-6}
n	Nano	Milliardstel	10^{-9}
p	Piko	Billionstel	10^{-12}

Masseinheiten

Länge l (r,s) Einheit: **m** Meter — Verwandlungszahl 10

1 m = 10 dm
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm

Fläche A Einheit: **m^2** Quadratmeter — Verwandlungszahl 100

$1\ km^2 = 100\ ha$
$1\ ha = 100\ a$
$1\ a = 100\ m^2$
$1\ m^2 = 100\ dm^2$
$1\ dm^2 = 100\ cm^2$
$1\ cm^2 = 100\ mm^2$

Volumen V Einheit: **m^3** Kubikmeter — Verwandlungszahl 1000

$1\ m^3 = 1000\ dm^3$
$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$
$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$

$1\ dm^3 = 1\ l$ (Liter) = 1000 ml
$1\ cm^3 = 1\ ml$

Masse m («Gewicht») Einheit: **kg** Kilogramm — Verwandlungszahl 1000

1 t = 1000 kg
1 kg = 1000 g
1 g = 1000 mg

Zeit t Einheit: **s** Sekunde

1d = 24 h
1 h = 60 min
1 min = 60 s

Bruchteile einer Sekunde werden in Zehntel-, Hundertstel- oder Tausendstelsekunden angegeben.

Temperatur T Einheit: **K** Kelvin

273 K = 0° C
373 K = 100° C

Geschwindigkeit v Einheit: **m/s** Meter pro Sekunde
km/h Kilometer pro Stunde

$$1\ \frac{m}{s} = 3{,}6\ \frac{km}{h}$$

$$0{,}2\overline{7}\ \frac{m}{s} = 1\ \frac{km}{h}$$

Stichwortverzeichnis