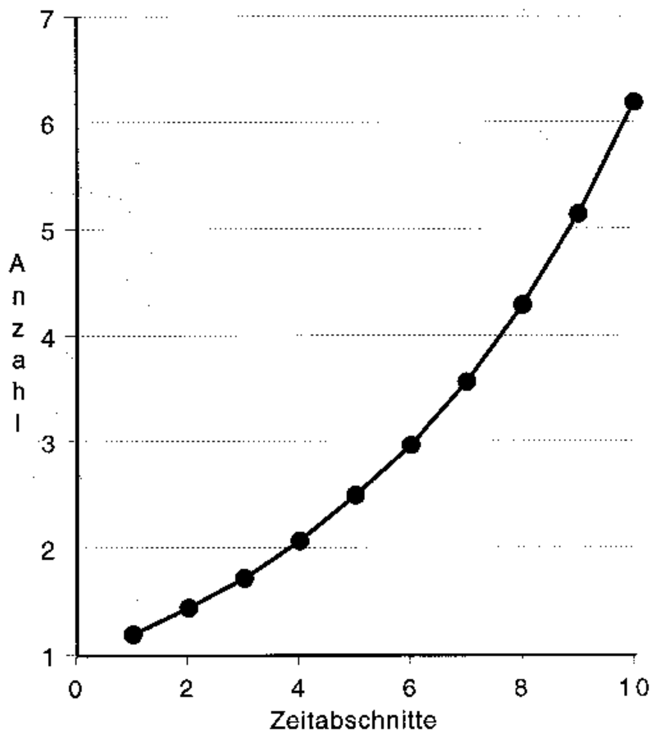
Mathematik
Wachstum & Zerfall



Name Vorname Klasse

3. Sekundarklasse

Problem

Angenommen, 2 SchülerInnen der OMR beginnen anfangs einer Pause mit der Verbreitung eines Gerüchts: Morgen ist schulfrei. Dieses Gerücht wird alle 2 Minuten von jeder Person, die davon Kenntnis hat, an eine neue Person weitergeleitet. Wieviele SchülerInnen wissen am Ende der 18 minütigen Pause Bescheid? Vervollständige die Tabelle!

Zeit in Min. seit Beginn	Anzahl Zeitabschnitte	Anzahl SchülerInnen, die Bescheid wissen	Zeit in Min. seit Beginn	Anzahl Zeitabschnitte	Anzahl SchülerInnen, die Bescheid wissen
0	0	2	10	5	64
2	1	4	12	6	128
4	2	8	14	7	256
6	3	16	16	8	512
8	4	32	18	9	1024

nach 1h → $2^{31} = 2'147'483'648$

Aufgabe 1

Kaninchenplage in Australien

Als die Europäer in Australien Kaninchen einführten, vermehrten sich diese in der Wildnis explosionsartig. Es gab in der neuen Welt kaum natürliche Feinde für diese Tiere. Unter solch günstigen Bedingungen können sich die Kaninchen jeden Monat um ca. 20 % vermehren. Wie viele Kaninchen lebten unter dieser Annahme nach dem 1., 2., ...n-ten Monat, wenn am Anfang Ao Tiere vorhanden waren?

Lösung:

Anzahl Kaninchen nach dem

1. Monat:	A1 = Ao + 0,2 • Ao	= Ao • (1 + 0,2)	= Ao • 1,2
2. Monat:	A2 = A1 + 0,2 • A1	= A1 • 1,2 = Ao • 1,2 • 1,2	= Ao • $1{,}2^2$
3. Monat:	A3 = A2 + 0,2 • A2	= A2 • 1,2 = Ao • 1,2 • 1,2 • 1,2	= Ao • $1{,}2^3$
4. Monat:	A4 = A3 + 0,2 • A3	= A3 • 1,2 = Ao • 1,2 • 1,2 • 1,2 • 1,2	= Ao • $1{,}2^4$

n-ten Monat: An = $A_0 \cdot 1{,}2^n$

Feststellung:

Um den neuen Bestand zu bestimmen, muss man den vorherigen mit 1,2 multiplizieren.

SATZ

Eine Gesamtheit Ao (Anfangsbestand),die sich je Zeit~~einheit~~abschnitt um den gleichen Wachstumsfaktor q vermehrt, wächst nach n Zeitabschnitten auf:

$$\boxed{A_n = A_0 \cdot q^n}$$

Wird das Wachstum in p% gegenüber dem vorherigen Zeitabschnitt angegeben, so beträgt der dazugehörende Wachstumsfaktor:

$$\boxed{q = 1 + p/100}$$

Ao = Anfangsbestand

An = Bestand nach n Zeitabschn.

n = Anzahl Zeitabschnitte

q = Wachstumsfaktor

Aufgabe 2a

1. Wächst ein Baum im Jahr um 2%, dann beträgt seine Länge nach 1 Jahr das 1,02 -fache des Vorjahres.
2. Auf einem See wachsen Seerosen. Sie vergrössern ihre Fläche pro Woche um 100%. Ihre Fläche beträgt also nach einer Woche das 2 -fache der vorangegangenen Woche.
3. Eine Sandwüste breite sich im Jahr um 20% aus. Nach 2 Jahren bedeckt sie das 1,44 -fache der Fläche vor 2 Jahren.

$1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44$

Aufgabe 2b

Colibakterien vermehren sich unter günstigen Bedingungen (37°C, genügend Nährstoffe) in 20 Minuten um 50%. Wieviele Bakterien hat man nach 6 Stunden, wenn es zu Beginn 2 Bakterien waren?

Geg.: $q = 1{,}5$ $A_0 = 2$; $n = \frac{360}{20} = 18$

Ges.: Bestand nach 6h A_{18}

Lösung: $A_{18} = 2 \cdot 1{,}5^{18} = 2956$

Nach 6 h sind es ca. 2956 Bakterien.

Aufgabe 3

Colibakterien vermehren sich unter günstigen Bedingungen (37°C, genügend Nährstoffe) in 20 Minuten um 50%.
Wir nehmen 2 Bakterien als Anfangswert.

Dann lautet die Formel für die Anzahl Bakterien nach n Zeitabschnitten:

$A_0 \cdot q^n$

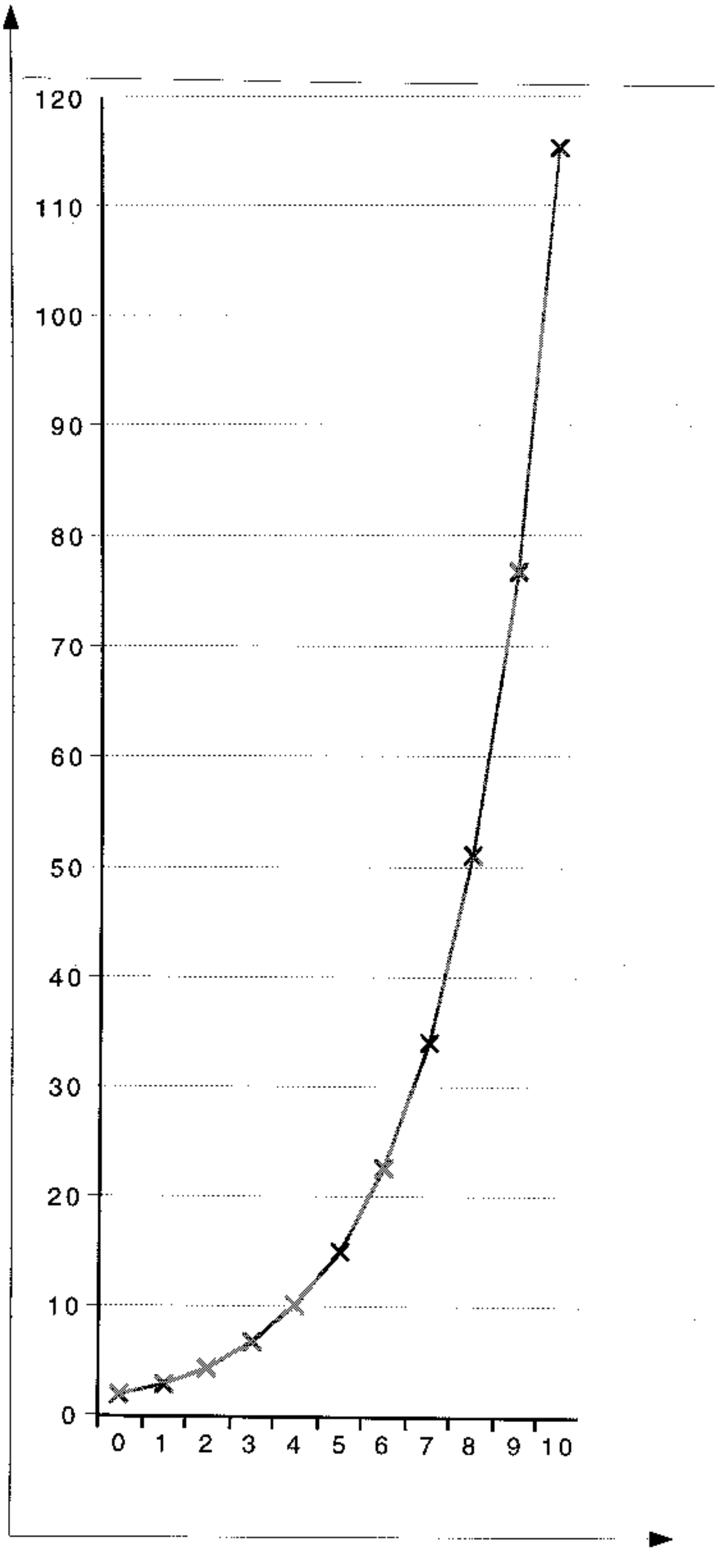
An = $2 \cdot 1{,}5^n$

$q = 1{,}5$

$A_0 = 2$

Ergänze die Tabelle und trage dann in den Graph ein

Zeit in Min	Zeit-abschnitte n=	Anzahl Bakterien
0	0	$A_0 = 2$
20	1	$A_1 = 2 \cdot 1{,}5^1 = 3$
40	2	$A_2 = 2 \cdot 1{,}5^2 \approx 5$
60	3	$A_3 = 2 \cdot 1{,}5^3 \approx 7$
80	4	$A_4 = 2 \cdot 1{,}5^4 \approx 10$
100	5	$A_5 = 2 \cdot 1{,}5^5 \approx 15$
120	6	$A_6 = 2 \cdot 1{,}5^6 \approx 23$
140	7	$A_7 = 2 \cdot 1{,}5^7 \approx 34$
160	8	$A_8 = 2 \cdot 1{,}5^8 \approx 51$
180	9	$A_9 = 2 \cdot 1{,}5^9 \approx 77$
200	10	$A_{10} = 2 \cdot 1{,}5^{10} \approx 115$
220	11	$A_{11} = 2 \cdot 1{,}5^{11} \approx 173$
240	12	$A_{12} = 2 \cdot 1{,}5^{12} \approx 259$
260	13	$A_{13} = 2 \cdot 1{,}5^{13} \approx 389$
280	14	$A_{14} = 2 \cdot 1{,}5^{14} \approx 584$
300	15	$A_{15} = 2 \cdot 1{,}5^{15} \approx 876$
320	16	$A_{16} = 2 \cdot 1{,}5^{16} \approx 1314$
340	17	$A_{17} = 2 \cdot 1{,}5^{17} \approx 1971$
360	18	$A_{18} = 2 \cdot 1{,}5^{18} \approx 2956$
380	19	$A_{19} = 2 \cdot 1{,}5^{19} \approx 4434$
400	20	$A_{20} = 2 \cdot 1{,}5^{10} \approx 6651$
420	21	$A_{21} = 2 \cdot 1{,}5^{21} \approx 9976$



Aufgabe 4

Beschreibe mit eigenen Worten den Verlauf der Kurve

Am Anfang ist die Zunahme nur unbedeutend, nimmt langsam Grösse, dann bedrohliche Ausmasse an, und schon wächst sie ins Riesenhafte.

Wo ist dieses rasante Wachstum von Bakterien erwünscht/nicht erwünscht?

Erwünscht: Bei Bakterien-Nachweisen in Substanzen (Züchtung von Bakterien)
Unerwünscht: Wachstum von Krankheitskeimen im menschlichen Körper.

Problem
Nicole hat mit 100.-Fr. ein Sparheft eröffnet, das mit 5% verzinst wird. Welchen Betrag kann sie nach 2 Jahren abheben, wenn sie denn Zins nach 1 Jahr auf dem Sparheft belässt?

Betrag nach 1. Jahr: $B_1 = 100.- + \frac{5}{100} \cdot 100 = 105$ Fr.

" " 2. Jahr $B_2 = B_1 + \frac{5}{100} \cdot B_1$

$= 105 + \frac{5}{100} \cdot 105 = 110.25$ Fr.

$B_0 \cdot 1{,}05^n = B_n$

Formeln

Liegt ein Kapital während mehreren Jahren auf der Bank, so wird am Jahresende der Zins zum Kapital addiert. Im folgenden Jahr verzinst sich daher dieses vergrösserte Kapital. Weil auch der dazugeschlagene Zins verzinst wird, spricht man von Zinseszins. Bei gleichbleibendem Zinssatz über mehrere Jahre wächst das Anfangskapital exponentiell. Man vewendet folgende Begriffe, Formvariablen und Formeln:

Ko Anfangskapital
Kn Kapital nach n Jahren
p Zinssatz
q Wachstumsfaktor
n Anzahl Jahre

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Aufgabe 1
Ein seltsames Beispiel, aber sehr interessant: Welchen Betrag könnte man 2009 von der Urbank abheben, hätte man im Jahre 1 n.Chr. 1 Franken eingezahlt, der zu 2% verzinst wurde?

$$K_{2009} = K_0 \cdot q^{2009} = 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{2009}$$
$$= 1 \cdot 1.02^{2009} = 1{,}8956 \cdot 10^{17} \text{ Fr.}$$

Das wären 189 Billiarden Franken!

Aufgabe 2
Was möchtest du lieber abheben: Ein vor 30 Jahren zu 4% angelegtes Kapital von 1000.-Fr. oder ein vor 15 Jahren ebenfalls zu 4% angelegtes Kapital von 2000.-Fr.?

$$K_{30} = 1000.- \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{30} = 3243.40 \text{ Fr.}$$
$$K_{15} = 2000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{15} = 3601.90 \text{ Fr.}$$

Ich möchte lieber das Kapital über 2000 Fr.

Aufgabe 3
Wieviele Jahre dauert es, bis ein Kapital bei einem Zinssatz von 5% auf das doppelte gewachsen ist?

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n = K_0 \cdot 1{,}05^n = 2 \cdot K_0 \quad | : K_0$$
$$1{,}05^n = 2$$

Mit ausprobieren kommt man auf $n = 15$

Das Kapital würde sich nach 15 Jahren verdoppelt haben.

Problem
Lea hat sich ein Mountain Bike gekauft, Kosten 500.- Fr. Welchen Wert hat ihr Velo nach 2 Jahren, wenn das Velo jedes Jahr 10% weniger Wert ist gegenüber dem Vorjahr?

Wert nach 1 Jahr = $500 \cdot 90/100 = 450.-$
Wert nach 2 Jahr = $450 \cdot 90/100 = 405.-$
Das Bike wäre noch 405.- Fr. Wert.

Formeln

Eine Gesamtheit Ao, die je Zeitabschnitt um p% abnimmt, vermindert sich nach n Zeiteinheiten zu :

Ao Anfangsbestand
An Bestand nach n Jahren
p Abnahme in % pro Zeitabsch.
n Anzahl Zeitabschnitte

$$An = Ao \cdot \underbrace{\left(1-\frac{p}{100}\right)}_{q}^{n} = Ao \cdot q^{n}$$

Aufgabe 1:
Wertverminderung

Frau Gasser hat vor 5 Jahren einen neuen Mittelklassenwagen für 25'000.- Fr. gekauft. Welchen Wert hat sie nun in der Steuererklärung einzusetzen, wenn der Wagen im Jahr 30% an Wert gegenüber dem Vorjahr verliert?

$$A_5 = A_0 \cdot q^{n}$$
$$= 25'000 \cdot \left(1-\frac{30}{100}\right)^5 = 25'000 \cdot 0{,}70^5$$
$$= \underline{\underline{4201.75 \text{ Fr.}}}$$

Das Auto hat noch einen Wert von 4201.75 Fr.

Aufgabe 2:
Radioaktivität

Beim Zerfall von Cäsium Cs124 vermindert sich die Anfangsmenge alle 2 Jahre um 50% (Halbwertszeit). Wie gross wird eine augenblickliche Cäsiummenge N0 von 100 in n = 2, 4, 6, ...30 Jahren Sein? Notiere zuerst die Formel für den Zerfall. Ergänze dann die Tabelle und zeichne den Graph.

1000

An = $1000 \cdot \left(1-\frac{50}{100}\right)^n$

Anz. Jahre	n =	Wert nach n Zeitabschnitten
0	0	$A_0 = 1000$
2	1	$A_1 = 500$
4	2	$A_2 = 250$
6	3	$A_3 = 125$
8	4	$A_4 = 62{,}5$
10	5	$A_5 = 31{,}25$
12	6	$A_6 = 15{,}625$
14	7	$A_7 = 7{,}8125$
16	8	$A_8 \approx 3{,}9$
18	9	$A_9 \approx 1{,}95$
20	10	$A_{10} \approx 0{,}98$

Übungen zu Wachstum und Zerfall

Löse die folgenden Aufgaben. Du musst mindestens fünf Aufgaben lösen. Aufgabe 5 ist Pflicht, die restlichen vier Aufgaben kannst du frei wählen. Schwierigere Aufgaben sind mit einem versehen.

Aufgabe 1
Ein bestimmtes Bakterium teilt sich in 3 Minuten einmal. Die entstehenden Bakterien teilen sich nach 3 Minuten wiederum, usw. Wieviele Lebewesen umfasst der Bakterienstamm nach 18 Minuten, wenn am Anfang

a) 10 Bakterien vorhanden sind?
b) 999 Bakterien vorhanden sind?

a) 18 min : 3 min = 6 Zeitabschnitte

$A_6 = A_0 \cdot q^n = 10 \cdot 2^6 = \underline{\underline{640 \text{ Bakterien}}}$

b) $A_6 = A_0 \cdot q^n = 999 \cdot 2^6 = \underline{\underline{63'936 \text{ Bakterien}}}$

Aufgabe 2
Pilze vermehren sich sehr rasch auf altem, schimmligen Brot. Alle 5 Minuten hat es 4 mal mehr Pilzbakterien auf einer Scheibe altem Brot. Wieviele Bakterien hat es nach 1 Stunde, wenn am Anfang 3 Bakterien auf dem Brot vorhanden waren?

4 x mehr → $q = 4$

60 min : 5 min = 12 Zeitabschnitte

$A_{12} = 3 \cdot 4^{12} = \underline{\underline{50'331'648 \text{ Pilze}}}$

Aufgabe 3
Im Jahr 1980 gab es etwa 4,5 Milliarden Menschen. Bei einer Vorhersage über die Weltbevölkerung rechnet man mit einem jährlichen Wachstum von 2%. Für die Weltbevölkerung Wx gilt dann: Wx = 4,5 Mrd$\cdot 1{,}02^{x}$ Erkläre, wie man auf diese Formel kommt.
Wie gross ist die Weltbevölkerung im Jahre 1990, 2000, 2010?

$W_x = 4.5 \cdot 1.02^{x}$ → Anzahl Jahre

4.5 ↓ Anfangsbestand

1.02 → Wachstumsfaktor $1 + \frac{2}{100}$

$W_{1990} = 4.5 \cdot 1.02^{10} = \underline{\underline{5'485'000'000}}$ Menschen

$W_{2000} = 4.5 \cdot 1.02^{20} = \underline{\underline{6'687'000'000}}$ M.

$W_{2010} = 4.5 \cdot 1.02^{30} = \underline{\underline{8'151'000'000}}$ M.

Aufgabe 4
Bei der Endlagerung von "Atommüll" verringert sich die Strahlung alle 10 Jahre auf ein Viertel. Der Anfangswert soll die "Strahlung" 100 betragen. Wie hoch ist die Strahlung nach 20, 30, 50 Jahren?

$A_n = A_0 \cdot q^n$

$A_n = 100 \cdot 0.25^n$

$A_{20} = 100 \cdot 0.25^2 = \underline{\underline{6{,}25}}$

$A_{30} = 100 \cdot 0.25^3 = \underline{\underline{1{,}56}}$

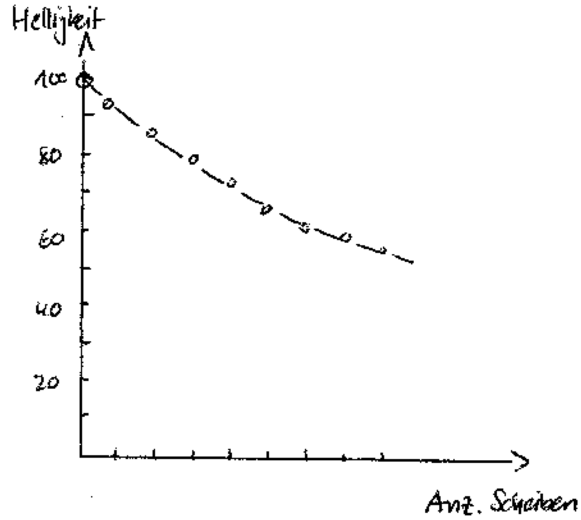
$A_{50} = 100 \cdot 0.25^5 = \underline{\underline{0.098}}$

Aufgabe 5
Beim Durchdringen einer bestimmten Glasplatte verliert das Licht 7% seiner Helligkeit. Welche Helligkeit hat das Licht noch nach dem Durchgang durch n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Glasplatten, wenn die Helligkeit am Anfang 100 war?
Erstelle eine Wertetabelle und zeichne den Graph auf (Vertikal die Helligkeit, Horizontal die Anzahl Glasplatten).

Wertetabelle

n	Wert
0	100
1	$100 \cdot 0.93^1 = 93$
2	$100 \cdot 0.93^2 = 86{,}5$
3	$100 \cdot 0.93^3 = 80.4$
4	$100 \cdot 0.93^4 = 74.8$
5	$100 \cdot 0.93^5 = 69{,}6$
6	$100 \cdot 0.93^6 = 64.7$
7	$100 \cdot 0.93^7 = 60.2$
8	$100 \cdot 0.93^8 = 56.0$

Graph



Aufgabe 6
Wie gross wird ein Kapital von 200.-Fr. in 15 Jahren sein, wenn es zu 2,25%, 3%, 4%, 5% und zu 10% angelegt wird?

$$K_{15} = 200 \cdot \left(1 + \tfrac{2{,}25}{100}\right)^{15} = \underline{\underline{279.25}}$$
$$K_{15} = 200 \cdot \left(1 + \tfrac{3}{100}\right)^{15} = \underline{\underline{311.60}}$$
$$K_{15} = 200 \cdot \left(1 + \tfrac{4}{100}\right)^{15} = \underline{\underline{360.20}}$$
$$K_{15} = 200 \cdot \left(1 + \tfrac{5}{100}\right)^{15} = \underline{\underline{530.65}}$$
$$K_{15} = 200 \cdot \left(1 + \tfrac{10}{100}\right)^{15} = \underline{\underline{835.45}}$$

Aufgabe 7
200 mg eines Medikamentes haben sich 3 h nach der Einnahme auf 25 mg abgebaut. Wie lautet die Formel für den Abbau dieses Medikamentes?

$A_0 = 200\,mg$ $:q$
$A_1 =$ $:q$
$A_2 =$ $:q$
$A_3 = 25\,mg$

$200 : 20 = :8$

$$q^3 = \tfrac{1}{8} \quad | \sqrt[3]{\ }$$
$$q = \tfrac{1}{2}$$
$$\underline{\underline{A_n = 200 \cdot \tfrac{1}{2}^{\,n}}}$$

Aufgabe 8
Ein Rattenvolk kann sich alle 2 Monate um 30% vermehren. Nach wievielen Monaten hat es sich spätestens
a) verdoppelt
b) verdreifacht
c) verzehnfacht?

$\left(1 + \tfrac{30}{100}\right)^n = 2 \quad \underline{\underline{\Rightarrow n \geq 3}}$

$\left(1 + \tfrac{30}{100}\right)^n = 3 \quad \underline{\underline{\Rightarrow n \geq 5}}$

$\left(1 + \tfrac{30}{100}\right)^n = 10 \quad \underline{\underline{\Rightarrow n \geq 9}}$

Aufgabe 9
Auf je 100 m Höhenzunahme sinkt der Luftdruck um ca. 1,3%. Auf Meereshöhe ist der Druck 1034 mbar. Wie gross ist der Luftdruck auf x = 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 1000, 2000, 3000, 4000 m über Meer? Erstelle eine Wertetabelle für die Luftdruckabnahme.

$$A_n = 1034 \cdot \left(1 - \tfrac{1{,}3}{100}\right)^n$$

$A_{200} = 1034 \cdot \left(1 - \tfrac{1{,}3}{100}\right)^2 = 1007$ mbar
$A_{300} = 1034 \cdot \left(1 - \tfrac{1{,}3}{100}\right)^3 = 994$ mbar
$A_{400} = 1034 \cdot \left(1 - \tfrac{1.3}{100}\right)^4 = 981$ mbar
$A_{500} = 1034 \cdot \left(1 - \tfrac{1.3}{100}\right)^5 = 969$ mbar
$A_{600} = 1034 \cdot \left(1 - \tfrac{1.3}{100}\right)^6 = 956$ mbar
$A_{700} = 1034 \cdot \left(1 - \tfrac{1.3}{100}\right)^7 = 943$ mbar
$A_{800} = 1034 \cdot \left(1 - \tfrac{1.3}{100}\right)^8 = 931$ mbar

$A_{1000} = 907$ mbar
$A_{2000} = 796$ mbar
$A_{3000} = 698$ mbar
$A_{4000} = 613$ mbar

Aufgabe 10
Von einem exponentiellen Bakterienwachstum kennt man nur den Wert nach 5 und 6 Zeitabschnitten: Sie betragen A5 = 64 und A6 = 128. Wie Lautet die vollständige Formel?

$A_6 = A_5 \cdot q^1 \rightarrow q = A_6 : A_5 = 128 : 64 = 2$

$A_5 = A_0 \cdot q^5 \Rightarrow 64 = A_0 \cdot 2^5 \Rightarrow A_0 = \frac{64}{2^5} = \underline{\underline{2}}$

$A_n = 2 \cdot 2^n$ Probe $A_6 = 2 \cdot 2^6 = 2 \cdot 64 = 128$ ✓

Lernziele

1. Du kennst die Begriffe für Ao, An, p, q, n und weisst wofür sie stehen.
2. Du kennst die Formel für das exponentielle Wachstum resp. den exponentiellen Zerfall auswendig.
3. Du kannst diese Formel nach jeder Variabeln auflösen.
4. Du kannst Berechnungen wie Zinseszins, Radioaktiver Zerfall, etc. gemäss den erarbeiteten Arbeitsblätter nach dem Schema Geg / Ges / Lösung korrekt berechnen.
5. Du kannst den graphischen Verlauf zum Wachstum resp. Zerfall korrekt und genau aufzeichen.

	Anfangsbestand Ao	Anzahl Zeitabschnitte n	Bestand nach n Zeitabschnitten An	Wachstums- faktor q	Wachstum in % p
a	1000	5	$A_5 = A_0 \cdot q^5$ $= 1000 \cdot 1{,}05^5$ $= \underline{1276.28}$	1.05	5%
b	5250	10	$A_{10} = 5250 \cdot 1{,}045^{10}$ $= \underline{\underline{8153.01}}$	1,045	4.5
c	6000	$A_n = A_0 \cdot q^n \quad \mid : A_0$ $\frac{A_n}{A_0} = q^n = \frac{7000}{6000} = 1{,}03^n$ $n = \frac{\log 7000 : 600}{\log 1{,}03} = \underline{\underline{5{,}2}}$	7000	1.03	3%
d	10000	$A_n = A_0 \cdot q^n$ $\frac{A_n}{A_0} = q^n \rightarrow n = \frac{\log A_n : A_0}{\log q}$ $n = \frac{\log(15600 : 10000)}{\log 1{,}035}$ $\underline{\underline{n = 12{,}9}}$	15600	1,035	3.5
e	500	18	779.75	$A_n = A_0 \cdot q^n$ $\frac{A_n}{A_0} = q^n \quad \mid \sqrt[n]{}$ $\sqrt[n]{\frac{A_n}{A_0}} = q = \sqrt[18]{\frac{779.75}{500}} = \underline{\underline{1{,}025}}$	2,5%
f	20000	27	57600	$\sqrt[n]{\frac{A_n}{A_0}} = q$ $\sqrt[27]{\frac{57'600}{20'000}} = 1{,}04$	4%