Wachstum

LU 3.17 Wachstum: linear, quadratisch, exponentiell

Lernziele

Ich kann ...	Ja • Nein
lineares Wachstum in Sachsituationen und Grafiken erkennen. SB 1 + 2	
nicht lineares Wachstum in Sachsituationen und Grafiken erkennen. SB 1 + 2	
Eigenschaften von exponentiellem Wachstum beschreiben. SB+4 und 5	
Kapital inkl. Zinseszins für x Anlagejahre berechnen. SB+6 und 7	
exponentiellen Zerfall als Spezialfall von exponentiellem Wachstum erkennen und beschreiben. SB+9	
Verdoppelungszeit bei expononliellem Wachstum bestimmen. AH+7	
verschiedenen Sachsituationen geeignete Graphen zuordnen. AH+12	

Lernlinks http://schule.omr.ch/ru oder http://www.mathbuch.info

Abgeben

- vollständig ausgefülltes und sauber geführtes Dossier inklusive aller Lösungswege
- Merkblatt zur Lernumgebung
- Ev. zusätzlich gelöste Blätter

Falls ein oder mehrere der oben erwähnten Punkte nicht erfüllt sind, hat dies negative Arbeitshaltungspunkte zur Folge.

Name Vorname Klasse

3. Sekundarklasse

Dossierkontrolle vom

Bemerkungen

Unterschrift der Eltern

Einstieg

Wachstum kann oft mit einer Funktionsgleichung beschrieben und grafisch dargestellt werden Dabei sind verschiedene Wachstumsarten zu unterscheiden. Das einfachste Wachstum ist das lineare Wachstum (zum Beispiel Proportionalität). Quadratisches Wachstum und exponentielles Wachstum beschreiben weitere Zusammenhänge zwischen Grössen.

Funktionstypen

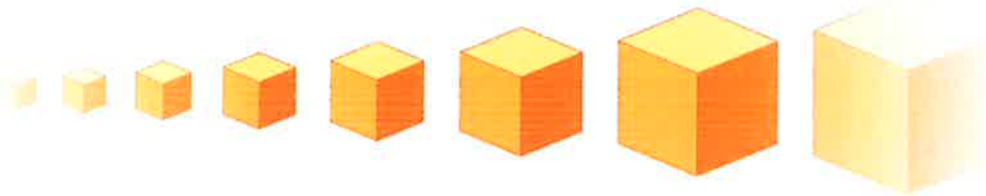
Eine Funktion vom Typ $y = a \cdot x$ heisst lineare Funktion. Sie beschreibt lineares Wachstum.

Eine Funktion vom Typ $y = a \cdot x^2$ heisst quadratische Funktion. Sie beschreibt quadratisches Wachstum.

a ist eine feste, unveränderbare Zahl (Konstante).

x heisst unabhängige Variable.

y heisst abhängige Variable (sie ist von x abhängig). Man sagt auch y ist eine Funktion von x.



	Seitenlänge s	0	0.5	1	2	3	4	5	s
B	Würfeloberfläche S	0	1.5	6	24	54	96	150	$S = 6 \cdot s^2$
C	Würfelvolumen V	0	0.125	1	8	27	64	125	$V = s^3$
D	Summe aller Kantenlängen k	0	6	12	24	36	48	60	$k = 12 \cdot s$

Schulbuch 1
Würfel verändern

A Stelle dir einen Würfel mit der Seitenlänge s vor und ergänze die Tabelle.

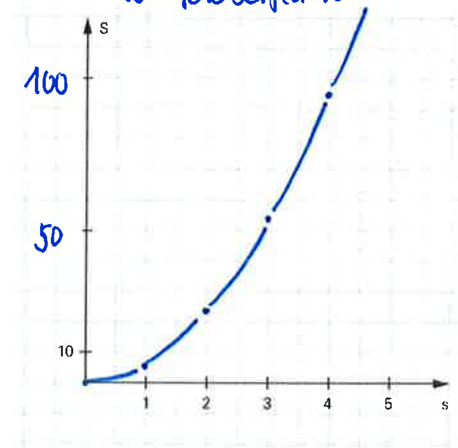
B Bestimme die Oberfläche S des Würfels durch einen Term (Tabelle, letzte Spalte) und stelle sie als Funktion von s durch einen Graphen in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

C Bestimme nun das Volumen V des Würfels durch einen Term (Tabelle, letzte Spalte) und stelle es ebenfalls als Funktion, abhängig von s, durch einen Graphen in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

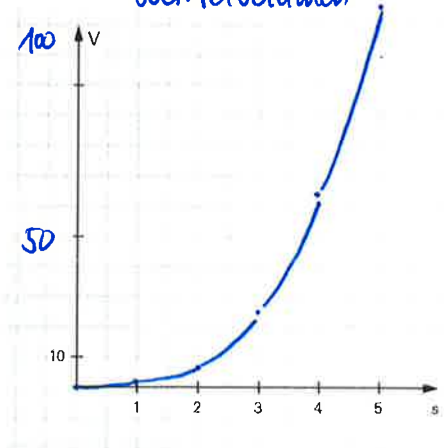
DBestimme die Summe aller Kantenlängen k und stelle auch diese als Funktion, abhängig von s, durch einen Term (Tabelle, letzte Spalte) und Graphen in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

E Um welche Typen von Funktionen handelt es sich bei B, C und D?

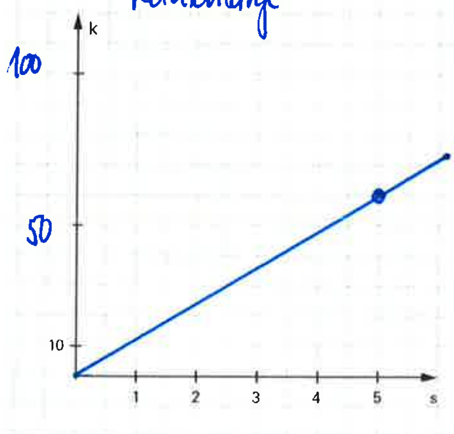
B Würfeloberfläche



C Würfelvolumen !



D Summe aller Kantenlänge



E

B → quadratische Funktion

C → andere Funktion
hoch³ ≙ kubische Funktion

D → lineare Funktion

Schulbuch 2
Funktionstypen

Untersuche, welche Funktionstypen die folgenden Situationen und Sachverhalte beschreiben und begründe deine Wahl.

1. lineare Funktion   2. quadratische Funktion   3. andere Funktion

A Das Volumen V eines Zylinders mit vorgegebenem Radius r ist abhängig von seiner Höhe h.
B Das Gewicht G eines Sandhaufens ist abhängig von seinem Volumen V.
C Die durchfahrene Strecke s ist abhängig von der Durchschnittsgeschwindigkeit v.
D Der Flächeninhalt A eines Kreises ist abhängig von seinem Durchmesser d.
E Die Länge a eines Rechtecks ist abhängig von der Breite b bei konstanter Rechtecksfläche.
F Die Zeitdauer t zum Durchfahren einer gegebenen Strecke ist abhängig von der Durchschnittsgeschwindigkeit v.
G Der Umfang u eines Kreises ist abhängig von seinem Radius r.
H Das Volumen V eines Zylinders mit konstanter Höhe h ist abhängig vom Radius r.
I Das Volumen V eines Würfels ist abhängig von der Kantenlänge s.
K Der Jahreszins z eines festen gegebenen Kapitals ist abhängig vom Zinssatz p%.

Begründung

A: → lineare Funktion

B: → lineare Funktion

C: → lineare Funktion

D: → quadratische F.

E: → andere F.

F: → andere F.
(indirekte Proportionalität)

G: → lineare F.

H: → quadratische F.

I: → andere F.
(kubische)

K: → lineare F.

Schulbuch 3
Schachlegende

Um die Erfindung des Schachspiels ranken sich zahlreiche Legenden. Das Spiel wurde angeblich im 3. Oder 4.Jahrhundert von Sissa ibn Dahir in Indien erfunden. Der indische Herrscher Shihram war vom Schachspiel so stark beeindruckt, dass er dem Erfinder des Spiels einen freien Wunsch gewährte. Daraufhin soll Dahir den Herrscher Shihram gebeten haben, ihm für das erste Schachfeld ein Weizenkorn, für das zweite Feld zwei, für das dritte vier, für das vierte acht Körner usw. zu übergeben. Diese auf den ersten Blick harmlose Forderung erweist sich als unerfüllbar.

$1 = 2^0$
$2 = 2^1$
$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ usw.

2^n ist die Potenzschreibweise für $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ (n-mal Faktor 2), Beispiel: $2^{10} = 1024$

Feld	1	2	3	4	5	6	...	63	64
Anzahl Körner	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$	$32 = 2^5$	...	2^{62}	2^{63}
Summe der Körner	1	3	7	15	31 2^5-1	63		$2^{63}-1$	$2^{64}-1$

A Bestimme die Anzahl Körner auf dem 63. und auf dem 64. Feld.

B Bestimme die Summe aller Körner auf den ersten 63 und auf allen 64 Feldern.
(Tipp: Vergleiche die Anzahl Körner in Zeile 2 und die Summe der Körner in Zeile 3.)

C Wie viele Weizenkörner haben in 1 cm^3 Platz? Überlege oder probiere aus.
Ein wirklich grosser Güterwagen fasst knapp 100 m^3 und ist etwa 20 m lang.
Wie lang wäre ein Güterzug mit der Summe aller Körner auf dem Schachbrett?

D Auf der ganzen Welt werden pro Jahr etwa 600 Millionen Tonnen Weizen geerntet.
Vergleiche die Weltjahresproduktion mit den Forderungen des Erfinders des Schachspiels.

(A) 63. Feld: $2^{62} \approx 4.6 \cdot 10^{18}$ Körner
64. Feld: $2^{63} \approx 9.2 \cdot 10^{18}$ Körner

(B) Auf den ersten 63 Feldern : $2^{63} - 1 \approx 2^{63} \approx$ K.
Auf allen 64 Felden : $2^{64} - 1 \approx 2^{64} \approx$ K.

(C) In 1 cm^3 haben etwa 15 Körner Platz.

2^{65} Körner $\approx 1.8 \cdot 10^{19}$ Körner brauchen also
ca. $1.8 \cdot 10^{19} : 15$ cm^3 $= 1.2 \cdot 10^{18}$ cm^3 Platz.
Das sind $1.2 \cdot 10^{18}\ cm^3 \xrightarrow{:10^6} 1.2 \cdot 10^{12}\ m^3$

Wenn 1 Güterwagen 100 m^3 fasst, braucht man also : $1.2 \cdot 10^{12}\ m^3 : 100\ m^3/$wagon
$= 1.2 \cdot 10^{10}$ Wagons!

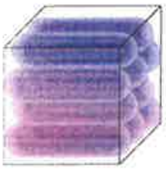
Wenn jeder Wagon 20 m lang ist, hätte der Zug eine Länge von :
$1.2 \cdot 10^{10} \cdot 20\ m = 2.4 \cdot 10^{11}\ m = 2.4 \cdot 10^{8}$ km

Das ist ca. das 1.5 Fache der Strecke Erde-Sonne oder ca. 6000 x der Erdumfang!!

1 t Weizen braucht ca. 1 m^3
$1.2 \cdot 10^{12}\ m^3 : 600 \cdot 10^6\ m^3$
$= 2'000$

Die Körner auf dem Schachbrett wären also das 2000-fache der Weltjahresproduktion!

Schulbuch 4
Bakterienwachstum (Mathematisches Denkmodell)



Stell dir vor, eine Bakterienkultur in einer Nährlösung besteht anfangs aus 100 Exemplaren. Jede Bakterie teilt sich stündlich. Nach einer Stunde sind es also 200, nach zwei Stunden 400 Exemplare.

A Berechne, wie viele Bakterien nach 6 h, 12 h, 18 h, 24 h, und 36 h vorhanden wären, wenn die Entwicklung so weiterginge. Erstelle dazu eine Tabelle.

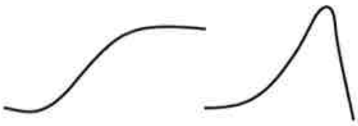
B Bakterien sind durchschnittlich etwa 10^{-4} cm lang und oft stabförmig. Zehn solcher Bakterien füllen etwa einen Würfel von 10^{-4} cm Kantenlänge. Auf welches Volumen würden die Bakterien nach 6 h, 12 h, 18 h, 24 h, und 36 h ungefähr anwachsen?

C Suche nach Gründen, warum dieses Denkmodell für längere Zeiträume (48 h , 72 h, 96 h, ...) nicht mehr realistisch ist.

A, B

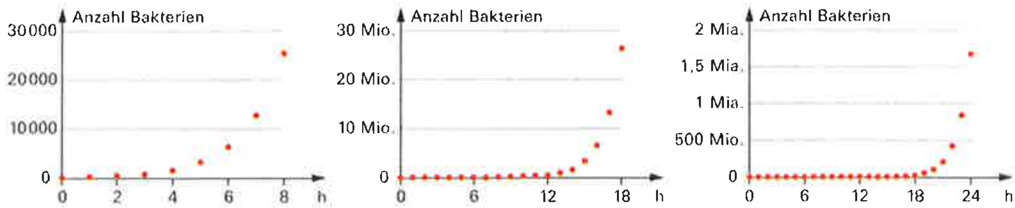
Zeit (h)	0	1	2	6	12	18	24	36	48	72	96
Anzahl Bakterien	100	200	400	$100 \cdot 2^{6}$	$100 \cdot 2^{12}$	$100 \cdot 2^{18}$	$100 \cdot 2^{24}$				
etwa				6 000	400 000	$2{,}6 \cdot 10^{7}$	$1{,}7 \cdot 10^{9}$	$7 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^{16}$	$5 \cdot 10^{23}$	$8 \cdot 10^{30}$
Volumen (cm³)				$6 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{0} = 4$	$2{,}6 \cdot 10^{2}$	$1{,}7 \cdot 10^{4}$	$7 \cdot 10^{7}$			

C In der Realität ist ein derartiges Wachstum allein schon wegen des fehlenden Platzes oder der fehlenden Nährlösung unmöglich. Bakterien scheiden oft ein Gift aus, das beim Überschreiten einer gewissen Konzentration den Prozess stoppt oder gar zum Absterben der Kultur führt.



Entwicklungen wie Bakterienwachstum verlaufen nicht linear, sondern exponentiell. Vorstellungen für exponentielles Wachstum sind beim Menschen wenig ausgeprägt. Wir realisieren exponentielle Entwicklungen oft erst unmittelbar vor einer Katastrophe.

Schulbuch 5
Grafische Darstellungen
Die drei Graphen stellen das Bakterienwachstum aus **Schulbuchaufgabe 4** für unterschiedliche Zeiträume dar. Vergleicht die drei Graphen und begründet damit die Aussage: „Der Mensch realisiert exponentielle Entwicklungen oft erst unmittelbar vor einer Katastrophe".



Im ersten Diagramm sieht die Entwicklung für die ersten 5, 6 Verdoppelungszeiten nicht allzu dramatisch aus. Erst bei 7 oder 8 Verdoppelungszeiten fällt die Dramatik auf.

Gleiches kann man zu den beiden anderen Diagrammen sagen: Bis zu 14, 15 bzw. bis zu 20, 21 Verdoppelungszeiten sieht die Entwicklung harmlos aus. Die Explosion kommt dann scheinbar aus dem Nichts.
Offenbar ist es eine Frage des Massstabs bzw. der Skalierung, ob ein Vorgang durchschaubar wird. Oder umgekehrt: Obwohl exponentielles Wachstum immer dramatisch ist und den Kern zur Katastrophe in sich trägt, kann man durch die Wahl des Massstabs die Entwicklung verschleiern. Möglicherweise wird durch den Blick zurück (harmlos, linear, fast horizontal) der Blick nach vorn versperrt.

Schulbuch 6
Zinseszinsen berechnen

A Studiere die Tabelle und erkläre dem Banknachbarn, wie die Zahlen berechnet wurden

B Berechne den Jahreszins für das 4. Jahr (gerundet auf CHF 0.10).

C Berechne den Wert nach vierJahren Laufzeit (gerundet auf CHF 0.10).

D Setze die Berechnungen für den Rest der Tabelle fort.

Im „mathbuch 2" wurden Jahreszinsen und Teile von Jahreszinsen (Marchzinsen) berechnet. Legt man ein Kapital auf ein Sparkonto, so wird am Ende eines Jahres der Zins dem gleichen Sparkonto gutgeschrieben. Somit ist das Kapital nach dem ersten Anlagejahr grösser als zu Beginn. Dieses neue Kapital wird im folgenden Jahr verzinst, was bei gleichem Zinssatz höhere Zinsen ergibt als im vorangehenden Anlagejahr. Mithilfe eines Taschenrechners oder eines Tabellenkalkulationsprogramms kann man entsprechende Tabellen ausfüllen.

Laufzeit in Jahren	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Jahreszins bei Zinssatz 5% in CHF	0	500	525	551.30	587.80	607.70	638.20
Wert in CHF	10'000	10'500	11'025	11'576.30	12'155.1	12'762.8	13'401.0

$\cdot 1.05$ $\cdot 1.05$ $\cdot 1.05$ $\cdot 1.05$

Schulbuch 7
Faktoren bestimmen

Das Endkapital eines Jahres lässt sich direkt aus dem Anfangskapital des Jahres berechnen.

A Mit welchem Faktor muss man in Aufgabe 6 jeweils das Anfangskapital eines Jahres multiplizieren, um das Endkapital zu erhalten?

B Mit welchem Faktor muss man das Anfangskapital multiplizieren, um das Endkapital nach zwei Anlagejahren zu erhalten?

C Mit welchem Faktor muss man das Anfangskapital multiplizieren, um das Endkapital nach drei Anlagejahren zu erhalten?

D Denke dir den Vorgang so fortgesetzt und bestimme den Faktor, mit dem man das Anfangskapital multiplizieren muss, um das Endkapital nach zehn und nach zwanzig Anlagejahren zu erhalten.

E Verallgemeinere deine Erkenntnisse auf x Anlagejahre.

(A) Mit dem Faktor 1.05 $= 1 + 5\% = 1 + \frac{5}{100} = 1.05$

(B) Mit dem Faktor $1.05 \cdot 1.05 = 1.05^2$

(C) Mit dem Faktor $1.05 \cdot 1.05 \cdot 1.05 = 1.05^3$

(D) Nach 10 Jahren: 1.05^{10}

20 Jahren: 1.05^{20}

(E) Endkapital = Anfangskapital $\cdot\ 1.05^x$

wobei x = Anzahl Jahre!

Schulbuch 9
C-14 Methode

In lebenden organischen Materialien, zum Beispiel in einem Baumstamm, kommt Kohlenstoff in den Isotopen C12 und C14 im Verhältnis 10^{12}:1 vor. C14 ist radioaktiv. Sobald der Tod eintritt und der Stoffwechsel zum Erliegen kommt, halbiert sich der C14-Anteil etwa alle 5700 Jahre (a). Diesen Sachverhalt nutzt man in der Archäologie zur Altersbestimmung von organischem Material.

B Suche die Angaben der Tabelle im Graphen und erklärt einander, warum er nicht linear verläuft.
C Welcher C14-Anteil gehört zu einem Alter von 5000 Jahren?
D Welches Alter gehört zu einem C14-Anteil von 20%?
E Wie gross ist der C14-Anteil nach vier Halbwertszeiten?

C Gemäss Graph um die 55–60%

D Gemäss Graph um die 13'000 Jahre

E In vier Halbwertszeiten halbiert sich der C-14-Anteil 4x:

50% → 25% → 12.5% → 6.25%
1. 2. 3. 4.

Die Kohlenstoff-Uhr (C14-Methode)

Radioaktiver Zerfall (exponentieller Zerfall)
Materie besteht aus chemischen Elementen, wie zum Beispiel Kohlenstoff (C).
Von den meisten chemischen Elementen gibt es Isotope (griechisch «am gleichen Ort»). Sie stehen im Periodensystem der Elemente am gleichen Ort, sind aber unterschiedlich schwer. Instabile Isotope sind radioaktiv und zerfallen in sogenannten Halbwertszeiten. Unabhängig von äusseren Bedingungen halbiert sich dabei die Anzahl Atome des Isotops in einer bestimmten Zeit T. Diese Zeit T heisst Halbwertszeit. Sie kann sehr klein oder auch sehr gross sein.

Beispiele:

Radon 220 (Ra220)	Halbwertszeit 56 s
Jod 131 (J131)	Halbwertszeit ≈ 8 d
Kohlenstoff 14 (C14)	Halbwertszeit ≈ 5 730 a
Uran 238 (U238)	Halbwertszeit ≈ $4{,}7 \cdot 10^9$ a

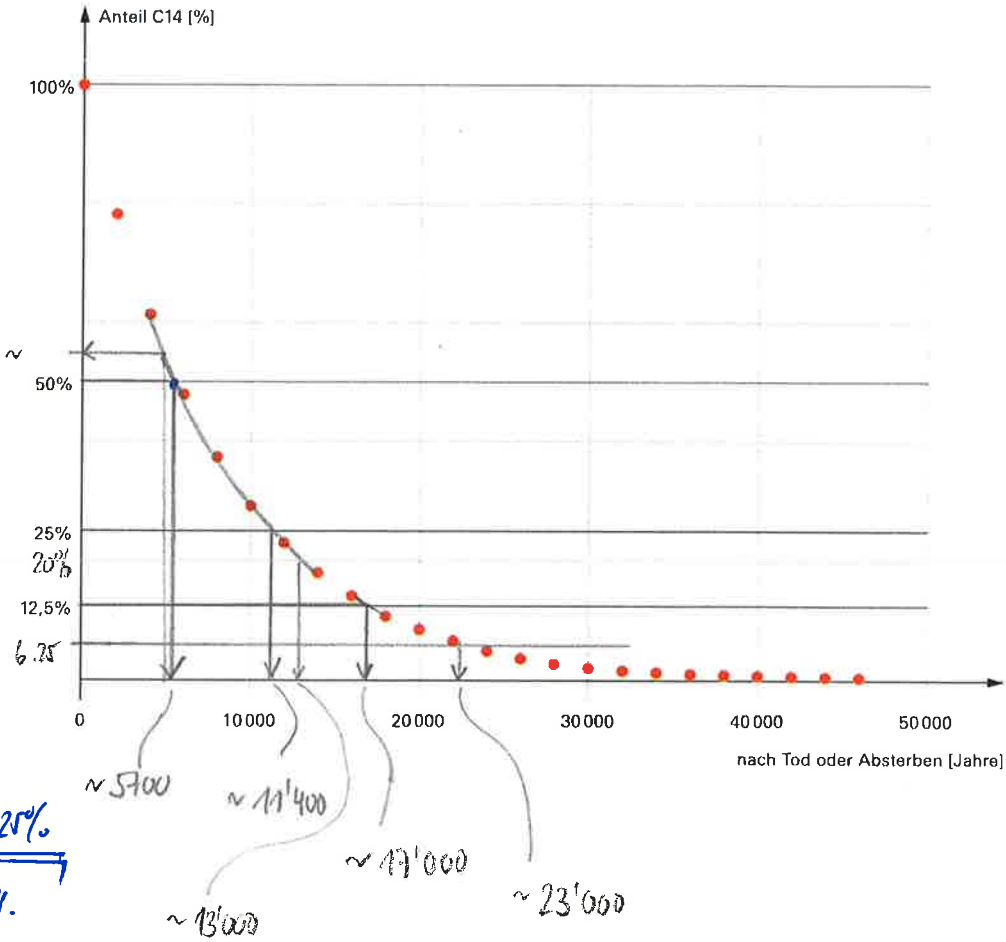
(a = Jahre)

Radioaktiver Zerfall lässt sich in einer Tabelle allgemein so darstellen:

Zeitpunkt	0	T	2T	3T
Menge	n	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{8}$

A Erklärt einander die Bedeutungen und Beziehungen der einzelnen Angaben in der Tabelle.

Alter des Fossils	0T (lebend)	1T (≈ 5700 a)	2T (≈ 11400 a)	3T (≈ 17000 a)	4T (≈ 23 000 a)
Anzahl C12-Atome	10^{15}	10^{15}	10^{15}	10^{15}	10^{15}
Anzahl C14-Atome	1000	500	250	125	≈ 60
Anteil C14-Atome	100 %	50 %	25 %	12,5 %	6,25 %



Theorie Teil 1

Problem

Angenommen, 2 SchülerInnen der OMR beginnen anfangs einer Pause mit der Verbreitung eines Gerüchts: Morgen ist schulfrei. Dieses Gerücht wird alle 2 Minuten von jeder Person, die davon Kenntnis hat, an eine neue Person weitergeleitet. Wieviele SchülerInnen wissen am Ende der 18 minütigen Pause Bescheid? Vervollständige die Tabelle!

Zeit in Min. seit Beginn	Anzahl Zeitabschnitte	Anzahl SchülerInnen, die Bescheid wissen
0	0	2
2	1	4
4	2	8
6	3	16
8	4	32

Zeit in Min. seit Beginn	Anzahl Zeitabschnitte	Anzahl SchülerInnen, die Bescheid wissen
10	5	64
12	6	128
14	7	256
16	8	512
18	9	1024

nach 1h → $2^{31} = 2'147'483'648$

Aufgabe 1

Kaninchenplage in Australien

Als die Europäer in Australien Kaninchen einführten, vermehrten sich diese in der Wildnis explosionsartig. Es gab in der neuen Welt kaum natürliche Feinde für diese Tiere. Unter solch günstigen Bedingungen können sich die Kaninchen jeden Monat um ca. 20 % vermehren. Wie viele Kaninchen lebten unter dieser Annahme nach dem 1., 2., ...n-ten Monat, wenn am Anfang Ao Tiere vorhanden waren?

Lösung:

Anzahl Kaninchen nach dem

1. Monat:	$A1 = Ao + 0{,}2 \cdot Ao$	$= Ao \cdot (1 + 0{,}2)$	$= Ao \cdot 1{,}2$
2. Monat:	$A2 = A1 + 0{,}2 \cdot A1$	$= A1 \cdot 1{,}2 = Ao \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2$	$= Ao \cdot 1{,}2^2$
3. Monat:	$A3 = A2 + 0{,}2 \cdot A2$	$= A2 \cdot 1{,}2 = Ao \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2$	$= Ao \cdot 1{,}2^3$
4. Monat:	$A4 = A3 + 0{,}2 \cdot A3$	$= A3 \cdot 1{,}2 = Ao \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2$	$= Ao \cdot 1{,}2^4$

n-ten Monat: An = $A_0 \cdot 1{,}2^n$

Feststellung:

Um den neuen Bestand zu bestimmen, muss man den vorherigen mit 1,2 multiplizieren.

SATZ

Eine Gesamtheit Ao (Anfangsbestand), die sich je Zeit~~einheit~~abschnitt um den gleichen Wachstumsfaktor q vermehrt, wächst nach n Zeitabschnitten auf:

$$\boxed{An = A_0 \cdot q^n}$$

Ao = Anfangsbestand

An = Bestand nach n Zeitabschn.

n = Anzahl Zeitabschnitte

Wird das Wachstum in p% gegenüber dem vorherigen Zeitabschnitt angegeben, so beträgt der dazugehörende Wachstumsfaktor:

$$\boxed{q = 1 + p/100}$$

q = Wachstumsfaktor

Aufgabe 2a

1. Wächst ein Baum im Jahr um 2%, dann beträgt seine Länge nach 1 Jahr das 1,02 -fache des Vorjahres.
2. Auf einem See wachsen Seerosen. Sie vergrössern ihre Fläche pro Woche um 100%. Ihre Fläche beträgt also nach einer Woche das 2 -fache der vorangegangenen Woche.
3. Eine Sandwüste breite sich im Jahr um 20% aus. Nach 2 Jahren bedeckt sie das 1,44 -fache der Fläche vor 2 Jahren.

$1.2 \cdot 1.2 = 1.44$

Aufgabe 2b

Colibakterien vermehren sich unter günstigen Bedingungen (37°C, genügend Nährstoffe) in 20 Minuten um 50%. Wieviele Bakterien hat man nach 6 Stunden, wenn es zu Beginn 2 Bakterien waren?

Geg: $q = 1{,}5$ $A_0 = 2$; $n = \frac{360}{20} = 18$

Ges: Bestand nach 6 h A_{18}

Lösung: $A_{18} = 2 \cdot 1{,}5^{15} = 2956$

Nach 6 h sind es ca. 2956 Bakterien.

Theorieteil 2

Problem
Nicole hat mit 100.-Fr. ein Sparheft eröffnet, das mit 5% verzinst wird. Welchen Betrag kann sie nach 2 Jahren abheben, wenn sie denn Zins nach 1 Jahr auf dem Sparheft belässt?

Betrag nach 1. Jahr: $B_1 = 100.- + \frac{5}{100} \cdot 100 = 105$ Fr.

" " 2. Jahr $B_2 = B_1 + \frac{5}{100} \cdot B_1$

$= 105 + \frac{5}{100} \cdot 105 = 110.25$ Fr.

$B_0 \cdot 1{,}05^n = B_n$

Formeln

Liegt ein Kapital während mehreren Jahren auf der Bank, so wird am Jahresende der Zins zum Kapital addiert. Im folgenden Jahr verzinst sich daher dieses vergrösserte Kapital. Weil auch der dazugeschlagene Zins verzinst wird, spricht man von Zinseszins. Bei gleichbleibendem Zinssatz über mehrere Jahre wächst das Anfangskapital exponentiell. Man vewendet folgende Begriffe, Formvariablen und Formeln:

Ko Anfangskapital
Kn Kapital nach n Jahren
p Zinssatz
q Wachstumsfaktor
n Anzahl Jahre

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Aufgabe 1
Ein seltsames Beispiel, aber sehr interessant: Welchen Betrag könnte man **2003** von der Urbank abheben, hätte man im Jahre 1 n.Chr. 1 Franken eingezahlt, der zu 2% verzinst wurde?

$$K_{2009} = K_0 \cdot q^{2009} = 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{2009}$$
$$= 1 \cdot 1.02^{2009} = 1{,}8956 \cdot 10^{17} \text{ Fr.}$$

Das wären 189 Billiarden Franken!

Aufgabe 2
Was möchtest du lieber abheben: Ein vor 30 Jahren zu 4% angelegtes Kapital von 1000.-Fr. oder ein vor 15 Jahren ebenfalls zu 4% angelegtes Kapital von 2000.-Fr.?

$$K_{30} = 1000.- \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{30} = 3243.40 \text{ Fr.}$$
$$K_{15} = 2000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{15} = 3601.90 \text{ Fr.}$$

Ich möchte lieber das Kapital über 2000 Fr.

Aufgabe 3
Wieviele Jahre dauert es, bis ein Kapital bei einem Zinssatz von 5% auf das doppelte gewachsen ist?

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n = K_0 \cdot 1{,}05^n = 2 \cdot K_0 \quad | : K_0$$
$$1{,}05^n = 2$$

$\log(2 : 1{,}05)$
$\log(2) : \log(1{,}05)$

Mit ausprobieren kommt man auf $n = 15$

Das Kapital würde sich nach 15 Jahren verdoppelt haben.

Theorieteil 3

Problem
Lea hat sich ein Mountain Bike gekauft, Kosten 500.- Fr. Welchen Wert hat ihr Velo nach 2 Jahren, wenn das Velo jedes Jahr 10% weniger Wert ist gegenüber dem Vorjahr?

Wert nach 1 Jahr = $500 \cdot 90/100$ = 450.-
Wert nach 2 Jahr = $450 \cdot 90/100$ = 405.-
Das Bike wäre noch 405.- Fr. Wert.

Formeln

Eine Gesamtheit Ao, die je Zeitabschnitt um p% abnimmt, vermindert sich nach n Zeiteinheiten zu :

Ao Anfangsbestand
An Bestand nach n Jahren
p Abnahme in % pro Zeitabsch.
n Anzahl Zeitabschnitte

$$A_n = A_0 \cdot \underbrace{\left(1-\frac{p}{100}\right)}_{q}^{n} = A_0 \cdot q^n$$

Aufgabe 1:
Wertverminderung

Frau Gasser hat vor 5 Jahren einen neuen Mittelklassenwagen für 25'000.- Fr. gekauft. Welchen Wert hat sie nun in der Steuererklärung einzusetzen, wenn der Wagen im Jahr 30% an Wert gegenüber dem Vorjahr verliert?

$$A_5 = A_0 \cdot q^n$$
$$= 25'000 \cdot \left(1-\frac{30}{100}\right)^5 = 25'000 \cdot 0{,}70^5$$
$$= \underline{\underline{4201.75 \text{ Fr.}}}$$

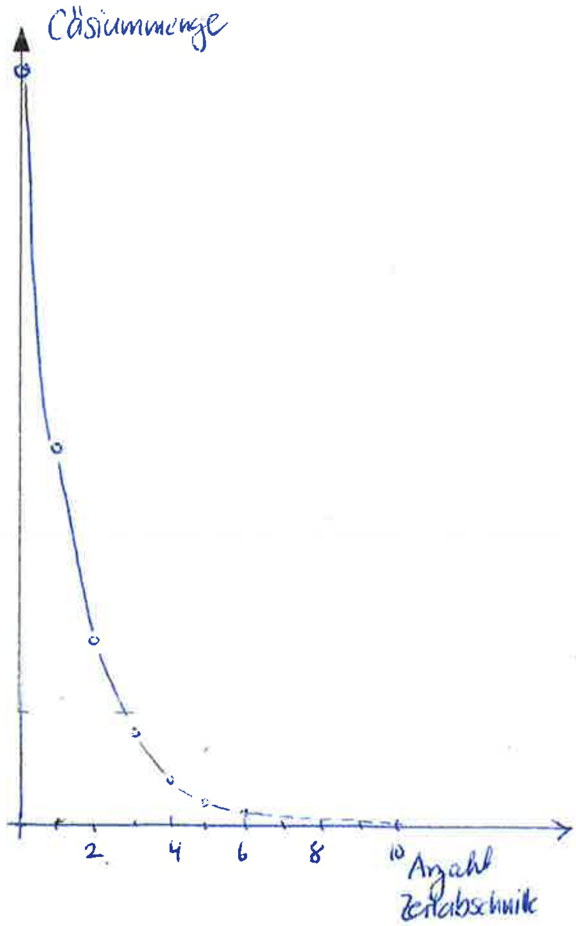
Das Auto hat noch einen Wert von 4201.75 Fr.

Aufgabe 2:
Radioaktivität

Beim Zerfall von Cäsium Cs124 vermindert sich die Anfangsmenge alle 2 Jahre um 50% (Halbwertszeit). Wie gross wird eine augenblickliche Cäsiummenge N0 von 10^3 in n = 2, 4, 6, ...30 Jahren Sein? Notiere zuerst die Formel für den Zerfall. Ergänze dann die Tabelle und zeichne den Graph.

An = $1000 \cdot \left(1-\frac{50}{100}\right)^n$

Anz. Jahre	n =	Wert nach n Zeitabschnitten
0	0	A_0= 1000
2	1	A_1 = 500
4	2	A_2 = 250
6	3	A_3 = 125
8	4	A_4 = 62,5
10	5	A_5 = 31,25
12	6	A_6 = 15,625
14	7	A_7 = 7,8125
16	8	$A_8 \approx 3{,}9$
18	9	$A_9 \approx 1{,}95$
20	10	$A_{10} \approx 0{,}98$



Arbeitsheft Aufgabe 1
Kreiszylinder:
Volumen in Abhängigkeit von Höhe h

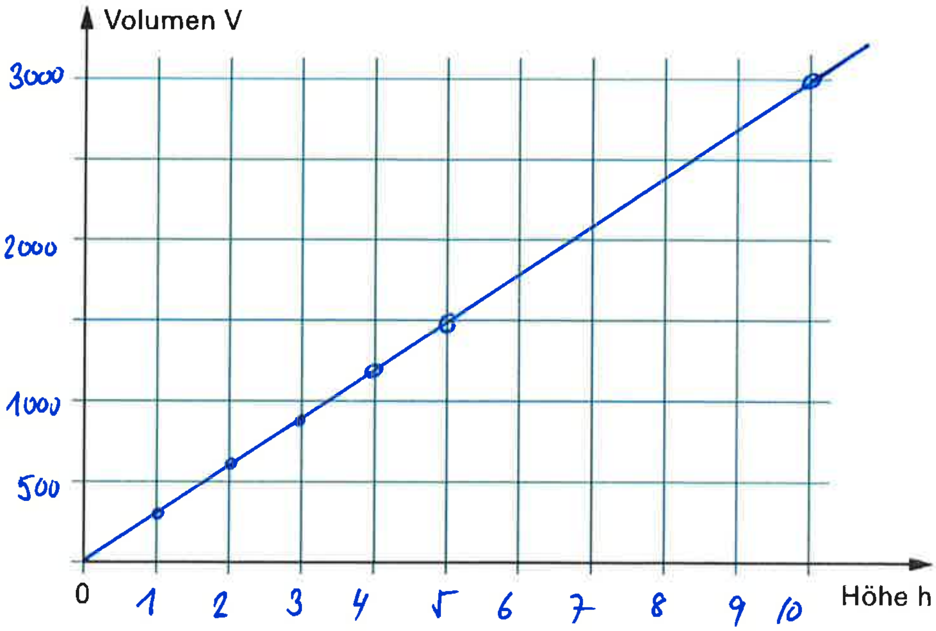
A Ergänze die Tabelle mit den entsprechenden Werten eines Kreiszylinders. Rechne mit dem Näherungswert Pi = 3.

Radius r	10	10	10	10	10	10	10	10
Höhe h	1	2	3	4	5	10	20	100
Volumen V	300	600	900	1200	1500	3000	6000	30'000

$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$

B In diesem Beispiel ist der Radius r konstant. Das Volumen V ist nur abhängig von der Höhe h Stelle diesen Sachverhalt in einem geeigneten Koordinatensystem mit einem Graphen dar.

B



C Um welchen Funktionstyp handelt es sich?

Es ist eine lineare Funktion.

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

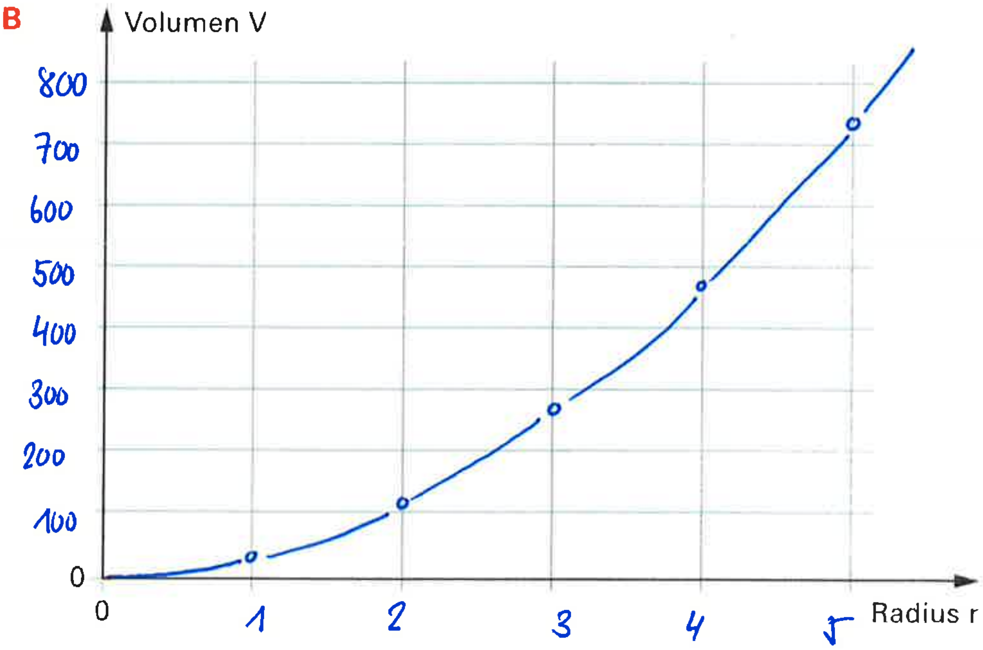
Arbeitsheft Aufgabe 2
Kreiszylinder:
Volumen in Abhängigkeit von Radius r

A Ergänze die Tabelle mit den entsprechenden Werten eines Kreiszylinders. Rechne mit dem Näherungswert Pi = 3.

Höhe h	10	10	10	10	10	10	10	10
Radius r	1	2	3	4	5	10	20	100
Volumen V	30	120	270	480	750	3000	12'000	300'000

B In diesem Beispiel ist die Höhe h konstant. Das Volumen V ist nur abhängig vom Radius r. Stelle diesen Sachverhalt in einem geeigneten Koordinatensystem mit einem Graphen dar.

B



C Um welchen Funktionstyp handelt es sich?

Es ist eine quadratische Funktion

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Arbeitsheft Aufgabe 3 Papierfalten bis zum Mond

A Falte ein A4-Blatt zu 45, A6 (Postkarte), A7 ... fortlaufend, so weit wie möglich. Bestimme damit die ungefähre Papierdicke. Ergänze die Tabelle.

Anzahl Faltungen (n)	0	1	2	3	4	5
Anzahl Schichten (s)	1	2	4	8	16	32
Höhe aller Schichten (h) [mm]	0,1	0,2	0.4	0.8	1.6	3.2

B Wie hoch wären alle Schichten, wenn man 10 oder 20 Faltungen ausführen könnte?

C Wie viele Faltungen würde es brauchen, bis man den Mond (Entfernung Erde - Mond - 400'000 km) erreicht hätte?

D Wie viele Faltungen würde es brauchen, bis man die Sonne (Entfernung Erde - Sonne – $1.5 \cdot 10^8$ km) erreicht hätte?

E Erstelle einen passenden Graphen zur Tabelle.

F Beschreibe die Abhängigkeit der Anzahl Schichten (s) von der Anzahl Faltungen (n) durch eine Formel.

H Beschreibe die Abhängigkeit der Höhe aller Schichten (h) von der Anzahl Faltungen (n) durch eine Formel.

(B) Schichtdicke $d = 0.1\,mm \cdot 2^n$ (n = Anz. Faltungen)

$d_{10} = 0.1\,mm \cdot 2^{10} = 102.4\,mm$

$d_{20} = 0.1\,mm \cdot 2^{20} = 104'857.6\,mm \approx 104\,m$!

(C) $d = 0.1\,mm \cdot 2^n = 400'000'000'000 \quad | : 0.1\,mm$

$2^n = 4'000'000'000'000$

entweder pröbeln oder log-Funktion! $n = \dfrac{\log 4'000'000'000'000}{\log 2}$

$n = 41.86$ → $\underline{\underline{\text{42 Faltungen}}}$ bräuchte es!

(D) $d = 0.1\,mm \cdot 2^n = 150'000'000'000'000\,mm \quad | : 0.1\,mm$

$2^n = 1500'000'000'000'000$

entweder pröbeln oder log-Funktion → $n = \log$: $\log 2$

$n = 50.4$ → $\underline{\underline{\text{51 Faltungen}}}$! braucht es!

(F)

Anzahl Schichten s

$\underline{\underline{s = 2^n}}$

(H)

Höhe h

$\underline{\underline{h = 0.1\,mm \cdot 2^n}}$

Arbeitsheft Aufgabe 5 Zinseszinsen

Nimm an, dass am 1. Januar 2000 ein Sparkonto mit der Einlage CHF 1000.00 eröffnet wurde. Rechne der Einfachheit halber mit einem konstanten jährlichen Zinssatz von 2,5%. Der Jahreszins wird zum Kapital geschlagen.

A Berechne jeweils das neue Kapital und trage die Ergebnisse in die Tabelle ein.

runde jeweils auf 5 Rp. genau!

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Laufzeit [Jahre]	0	1	2	3	4	5	6
Zins bei 2,5 % [CHF]	0	25	25.60	26.30	26.90	27.60	28.30
Wert [CHF]	1 000	1 025	1 050.60	1076.90	1103.80	1131.40	1159.70

Kapital nach n Jahren $K_n = 1000 \cdot \left(1 + \frac{2.5}{100}\right)^n$

B Wann etwa wäre das Konto bei gleichen Bedingungen rund doppelt so viel wert?

(B) Entweder pröbeln oder:

$$K_n = 2000 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{2.5}{100}\right)^n \quad | : 1000$$

$$2 = 1.025^n \rightarrow n = \log 2 : \log 1.025$$

$n = 28.07 \rightarrow$ nach 29 Jahren

Arbeitsheft Aufgabe 6 Zinseszinsen

Angenommen, der Zinssatz in der vorherigen Aufgabe 5 wäre immer 5% gewesen.

A Wie gross wäre der Wert des Kontos im Jahre 2020?

20 Jahre

$$K_{20} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{20} = 2653.30 \text{ Fr.}$$

Start-Kapital

5% - Wachstum

B Wann etwa wäre das Kapital doppelt so viel wert wie im Jahre 2000?

$$K_n = 2000 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n \quad | : 1000$$

$$2 = 1.05^n \rightarrow n = \log 2 : \log 1.05$$

$n = 14.2 \rightarrow$ nach 15 Jahren

Arbeitsheft Aufgabe 7 Verdoppelung bei exponentiellem Wachstum

A Suche für einige der unten angegebenen Zinssätze die Anzahl Jahre, die es dauert, bis ein Kapital mit Zins und Zinseszins auf den doppelten Wert angewachsen ist.

log 2 : log 1.01

log 2 : log 1.04

Zinssatz p	1 %	2 %	3 %	3,5 %	4 %	5 %	7 %
Verdoppelungszeit [Jahre] ≈	69.7	35.0	23.4	20.1	17.7	14.2	10.2

B Bei einem jährlichen Zinssatz von weniger als 7% (also immer wenn p% < 7%) gilt folgende Faustregel:

Verdoppelungszeit (in Jahren) $= \frac{70}{\text{Anzahl Prozent}}$

B Berechne die Verdoppelungszeit mit der Faustregel und vergleiche mit den Ergebnissen bei Aufgabe A.

Zinssatz p	1 %	2 %	3 %	3,5 %	4 %	5 %	7 %
Verdoppelungszeit gemäss Faustregel	70	35	23.3	20	17.5	14	10

~24 ~18

Die Faustregel stimmt erstaunlich gut überein!

Arbeitsheft Aufgabe 8 Bevölkerungswachstum

Die Weltbevölkerung betrug Ende 2011 etwa 7 Milliarden Menschen. Sie wuchs in den letzten Jahren mit einer jährlichen Wachstumsrate von etwa 1,15%.

A Berechne die Anzahl Menschen auf der Erde Ende 2012,2013,2014,2015.

B Berechne die Anzahl Menschen auf der Erde Ende 2010, 2009, 2008.

(A) B = Bevölkerung

gerundet

$B_{2012} = 7 \text{ Milliarden} \cdot \left(1 + \frac{1.15}{100}\right)^1 = 7.08 \text{ Milliarden}$

$B_{2013} = 7 \text{ ''} \cdot (1.0115)^2 = 7.16 \text{ ''}$

$B_{2014} = 7 \text{ ''} \cdot 1.0115^3 = 7.24 \text{ ''}$

$B_{2015} = 7 \text{ ''} \cdot 1.0115^4 = 7.33 \text{ ''}$

$\cdot 1.0115$ / $\cdot 1.0115$ / $\cdot 1.0115$

(B)

$2011 \mathrel{\hat=} 7 \text{ Milliarden} \quad \mathrel{\hat=} 101.15\%$ $\quad : 1.0115 \cdot 1$

$2010 \mathrel{\hat=} 6.92 \text{ ''} \quad \mathrel{\hat=} 100$

$2009 \mathrel{\hat=} 6.84 \text{ ''}$ $\quad : 1.0115$

$2008 \mathrel{\hat=} 6.76 \text{ ''}$ $\quad : 1.0115$

Arbeitsheft Aufgabe 9 Bevölkerungswachstum

Ab dem Jahre 2015 nimmt die Zuwachsrate laut Prognosen ab. Sie beträgt für die Jahre 2015 bis 2050 durchschnittlich etwa 0,8%. Gehe davon aus, dass Ende 2015 etwa 7,3 Milliarden Menschen auf der Erde wohnen werden.

A Berechne die Anzahl Menschen auf der Erde Ende 2020, 2030, 2040, 2050-

B Wann ungefähr würde sich die Weltbevölkerung unter der Annahme gleichbleibender durchschnittlicher Zuwachsrate im Vergleich zu 2015 verdoppeln?

(A) B = Bevölkerung

gerundet

$B_{2020} \mathrel{\hat=} 7.3 \text{ Milliarden} \cdot \left(1 + \frac{0.8}{100}\right)^5 = 7.6 \text{ Milliarden}$

$B_{2025} = 7.3 \text{ ''} \cdot \left(1 + \frac{0.8}{100}\right)^{10} = 7.9 \text{ ''}$

$B_{2030} = 7.3 \text{ ''} \cdot 1.008^{15} = 8.2 \text{ ''}$

$B_{2040} = 7.3 \text{ ''} \cdot 1.008^{25} = 8.9 \text{ ''}$

$B_{2050} = 7.3 \text{ ''} \cdot 1.008^{35} = 9.6 \text{ ''}$

(B) $B_n = 2 \cdot 7.3 = 7.3 \cdot 1.008^n \quad | : 7.3$

$2 = 1.008^n$

$\rightarrow n = \log 2 : \log 1.008 = 86.98$

$n = \underline{\underline{87 \text{ Jahre}}}$

nach der Faustregel wären es $= \frac{70}{0.8} = \underline{\underline{87.5 \text{ Jahre}}}$

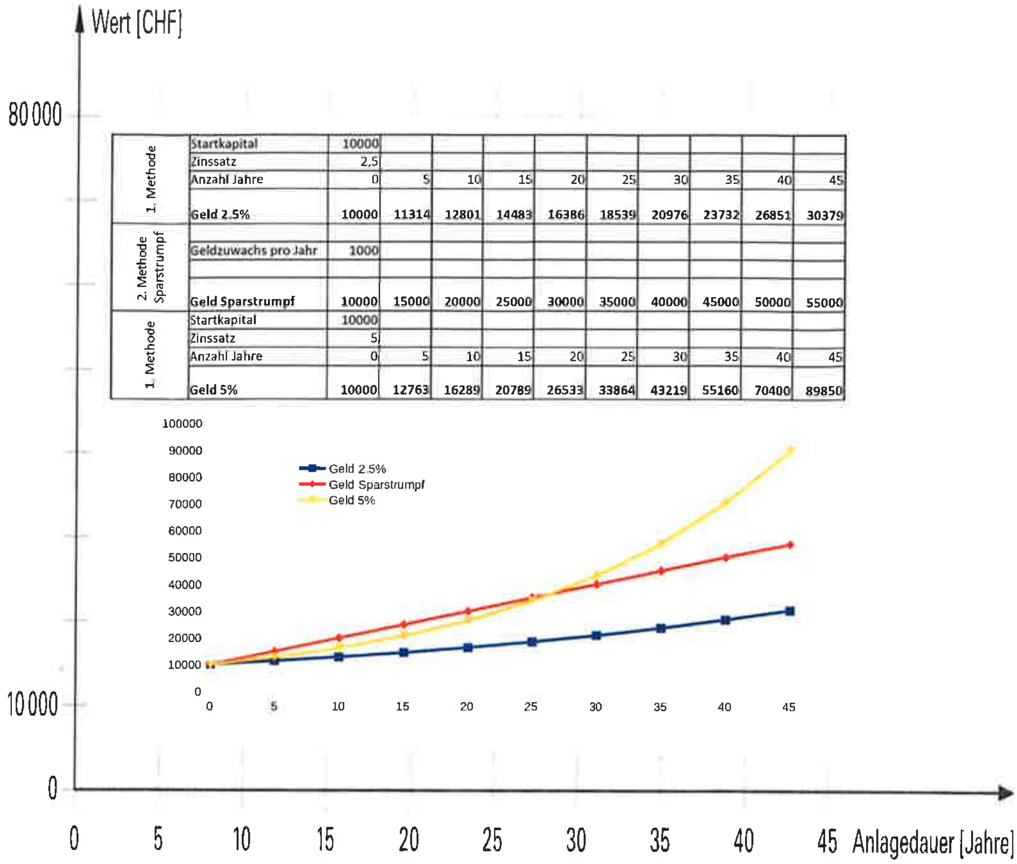
Arbeitsheft Aufgabe 10
Kapital

Nimm an. dass ein Kapital von CHF 10000.00 während 42 Jahren unter gleichen Bedingungen angelegt bleibt.
Trage in das Koordinatensystem den Wert des Kapitals für folgende drei Fälle ein.
1. Konstanter Zinssatz von 2,5%; Entwicklung mit Zins und Zinseszins

2. Es gibt jedes Jahr CHF 1000.00 dazu, aber keinen Zins („Methode Sparstrumpf Plus")

3. Konstanter Zinssatz von 5%; Entwicklung mit Zins und Zinseszins

löse am PC!



1. Methode	Startkapital	10000									
	Zinssatz	2,5									
	Anzahl Jahre	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	Geld 2.5%	10000	11314	12801	14483	16386	18539	20976	23732	26851	30379
2. Methode Sparstrumpf											
	Geldzuwachs pro Jahr	1000									
	Geld Sparstrumpf	10000	15000	20000	25000	30000	35000	40000	45000	50000	55000
1. Methode	Startkapital	10000									
	Zinssatz	5									
	Anzahl Jahre	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	Geld 5%	10000	12763	16289	20789	26533	33864	43219	55160	70400	89850

Arbeitsheft Aufgabe 11
Luftdruck

A Trage die Luftdruckkurve in das Koordinatensystem ein.

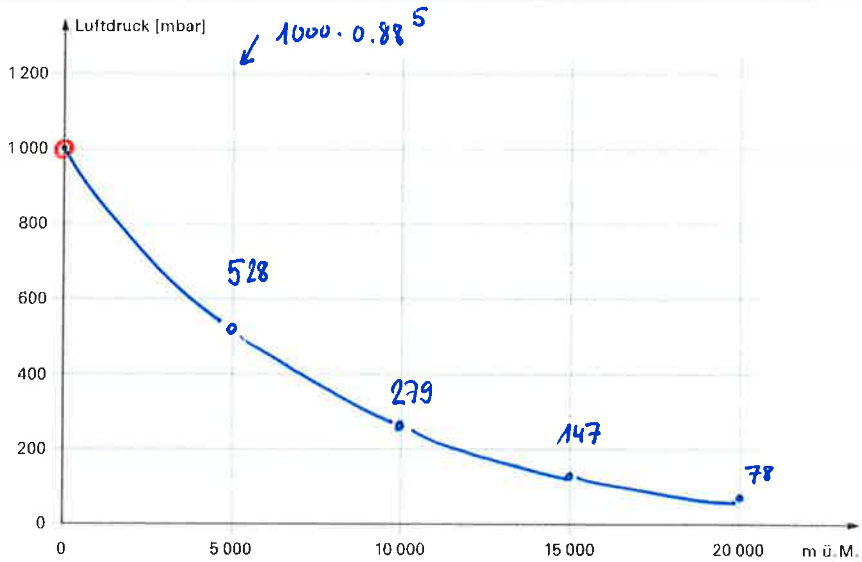
B Auf welcher Höhe (m ü. M.) beträgt der Luftdruck nur noch 20% des Normaldrucks?

C Wie gross ist der Luftdruck auf dem Säntis (2500 m ü. M.). auf dem Mont Blanc (4500 m ü. M.) und auf dem Mount Everest (8800 m ü. M.)?

D Bei welcher Höhendifferenz halbiert sich jeweils der Luftdruck?

Luft gibt es bis in viele Kilometer Höhe. Auch Luft hat ein Gewicht:
Ein Liter Luft wiegt normalerweise etwa 1,3 g, was den sogenannten Luftdruck bewirkt.
Gase lassen sich zusammendrücken. Darum ist die Luft auf Meereshöhe dichter als in den Bergen. Steigt ein Ballon nach oben, nimmt der Luftdruck am Anfang relativ schnell ab, dann immer langsamer.
Bei Normalbedingungen beträgt der Luftdruck auf Meereshöhe 1 000 mbar («millibar»).
Steigt man von dort auf, so nimmt er pro Kilometer Höhendifferenz um etwa 12 % ab.
Auf 1 000 m Höhe beträgt der Luftdruck noch etwa 88 % von 1 000 mbar, also 880 mbar.
Auf 2 000 m Höhe beträgt er noch 88 % davon, also $0{,}88^2 \cdot 1\,000$ mbar.
Auf 4 000 m Höhe beträgt er somit noch $0{,}88^4 \cdot 1\,000$ mbar.
Allgemein gilt für den Luftdruck p in Abhängigkeit der Höhe h folgende Formel:

$$p = 1\,000 \cdot 0{,}88^h$$ (Luftdruck p in mbar, Höhe h in Anzahl km)



D) $500 = 1000 \cdot 0.88^x \quad | :1000$

$0.5 = 0.88^x$

$\rightarrow x = \log 0.5 : \log 0.88$

$x = 5.4$

alle 5.4 km etwa!

halbiert sich der Luftdruck etwa!

B) 20% von 1000 mbar = 200 mbar

$p = 200\,\text{mbar} = 1000 \cdot 0.88^x \quad | :1000$

$0.2 = 0.88^x$

→ pröbeln oder log verwenden $x = \log 0.2 : \log 0.88$

Auf etwa 12.6 km Höhe! $x = 12.6$

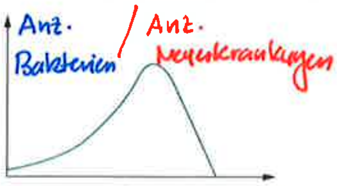
C) $p_{Säntis} = 1000 \cdot 0.88^{2.5} = 726$ mbar

$p_{Montblanc} = 1000 \cdot 0.88^{4.5} = 563$ mbar

$p_{Mt\,Everest} = 1000 \cdot 0.88^{8.8} = 325$ mbar

Arbeitsheft Aufgabe 12 Graphen zuordnen

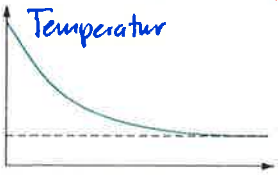
Ordne den verschiedenen Texten A bis I die Graphen 1 bis 12 zu. Es kann sein, dass ein Text zu mehreren Graphen passt, aber auch, dass ein Graph zu verschiedenen Texten gehört. Verfasse zu den Graphen ohne Text einen eigenen passenden Text. Beschrifte die Achsen.



Graph 1 → A Zeit
→ H Zeit

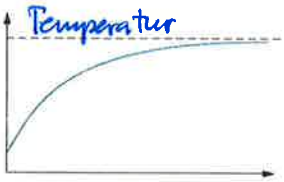
Graph 2

Graph 3 → B Zeit

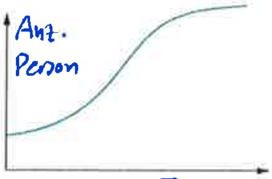


Graph 4 → C Zeit

Graph 5 → E Zeit

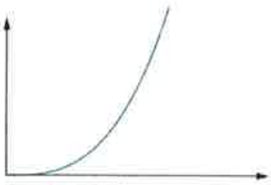


Graph 6 → D

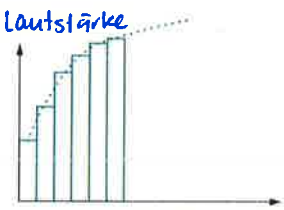


Graph 7 → I Zeit

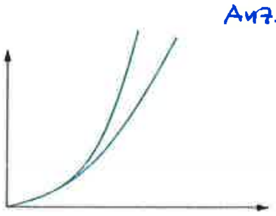
Graph 8 → G Zeit Anz. Tage



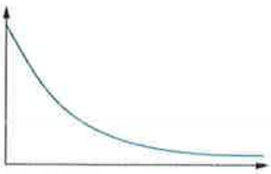
Graph 9



Graph 10 → F Anz. Instrumente



Graph 11



Graph 12

Text zu Graphen, die noch keinen passenden Text haben.

Graph 12: Exponentieller Zerfall z.B. radioaktiver Zerfall

Graph 2 : exponentielles Wachstum, z.B. Anwachsen einer Mäuse-Population ohne Feinde

Graph 9 : exponentielles Wachstum mit Start bei nahezu Null → Schachlegende mit Weizenkorn

Graph 11 : exponentielles Wachstum z.B. Zinseszins mit 2 verschiedenen Zinssätzen

A Eine Bakterienkultur wächst anfangs exponentiell. Die ausgeschiedenen Giftstoffe führen aber zu einem abrupten Abbruch des Wachstums und dann zum völligen Zusammenbruch der Population.

B Man lässt einen Stein und eine Baumnuss gleichzeitig von einer hohen Brücke fallen. Der Stein schlägt deutlich früher im Wasser auf. Offenbar behindert der Luftwiderstand das Anwachsen der Geschwindigkeit bei der Baumnuss stärker als beim Stein.

C Eine mit heissem Tee gefüllte Tasse wird ins Zimmer gestellt. Die Temperaturabnahme pro Zeiteinheit ist am Anfang gross, weil auch die Temperaturdifferenz zur Umgebung recht gross ist. Die Temperaturabnahme pro Zeit wird immer kleiner.

D Ein Glas mit kaltem Orangensaft aus dem Kühlschrank wird auf den Zimmertisch gestellt. Wie entwickelt sich die Temperatur im Verlaufe der Zeit? Finde den Graphen und erkläre.

E Überlege, wie sich die Geschwindigkeit eines startenden Rennautos entwickeln könnte. Finde den Graphen, der die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit zeigt.

F Wie wächst die empfundene Lautstärke, wenn eine Trompete zu schmettern beginnt, dann eine zweite dazukommt, dann eine dritte, dann eine vierte usw.?

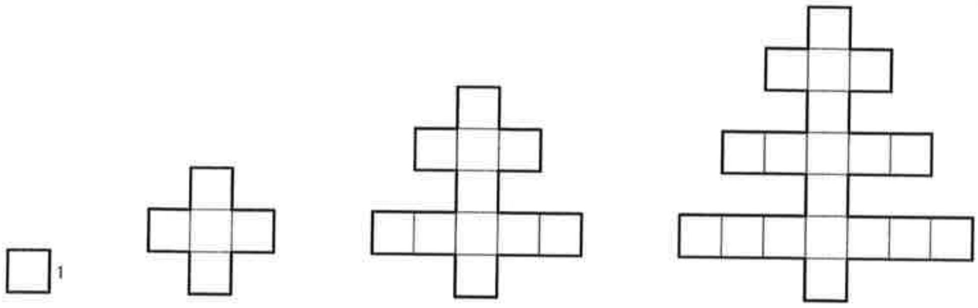
G Entwicklung der Aktienkurse, immer am Ende eines Tages aufgenommen.

H Jährliche Grippewelle: Entwicklung der Neuerkrankungen im Verlauf des Grippemonats.

I Anfangs scheint die Bevölkerung prozentual immer gleich zu wachsen, dann fällt die Zuwachsrate aber «sanft» bis auf 0. Wie könnte man das auch anders sagen? Welcher Graph passt?

Teste dich selbst!

1



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

Du siehst die ersten vier Figuren einer Figurenfolge.
Die Figuren setzen sich aus Quadraten mit der Seitenlänge 1 zusammen. Der Umfang ist dick ausgezogen.

A Ergänze die Tabelle.

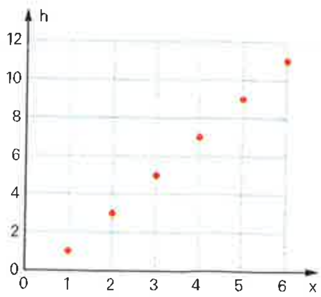
Figur x	1	2	3	4	5	6
Höhe h	1	3	5	7	9	11
Anzahl Quadrate Q	1	5	11	19	29	41
Umfang u	4	12	24	40	60	84

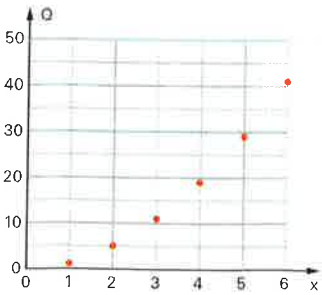
B Bei welchen der drei Elemente h, Q und u gibt es lineares Wachstum?

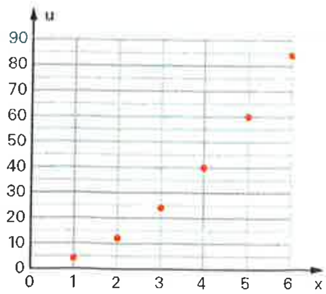
bei der Höhe h

C Stelle die Funktionen grafisch dar.

D Gib einen Term an.







$h = 2x - 1$

$Q = x(x+1) - 1 = x^2 + x - 1$

$u = 2x \cdot (x+1) = 2x^2 + 2x$

2

Zu welchen Funktionstypen passen die folgenden Situationen? Kreuze an.

	Situation	Funktionstyp: lineare Funktion	Funktionstyp: quadratische Funktion	Funktionstyp: andere Funktion
A	Ein Flugzeug fliegt mit konstanter Geschwindigkeit v. Die Länge s der zurückgelegten Strecke ist abhängig von der Zeit t.	☒	☐	☐
B	Die Oberfläche S eines Würfels ist abhängig von der Länge a seiner Kante.	☐	☒	☐
C	Die Länge der Diagonalen d eines Würfels ist abhängig von der Länge a seiner Kante.	☒	☐	☐
D	In einen Kreis mit dem vorgegebenen Radius r wird ein konzentrisches, kreisrundes Loch gestanzt. Die Fläche A des so entstandenen Ringes ist abhängig vom Durchmesser d des Loches.	☐	☒	☐
E	Eine Schnur mit vorgegebener Länge wird in n gleich lange Stücke geschnitten. Die Anzahl Stücke ist abhängig von der Länge a, die ein Stück hat.	☐	☐	☒
F	Die Masse m von Gold ist abhängig von seinem Volumen V.	☒	☐	☐
G	Die Temperatur T ist abhängig von der Tageszeit t.	☐	☐	☒
H	Die Länge der Strecke ist vorgegeben. Die Fahrzeit t ist abhängig von der durchschnittlichen Geschwindigkeit v.	☐	☐	☒
I	Das Kapital k ist vorgegeben. Der Jahreszins z ist abhängig vom Zinssatz p%.	☒	☐	☐
K	Der Zinssatz p% ist vorgegeben. Der Jahreszins z ist abhängig vom Kapital k.	☒	☐	☐
L	Der Jahreszins z ist vorgegeben. Der Zinssatz p% ist abhängig vom Kapital k.	☐	☐	☒

3

Am Anfang eines Jahres wird ein Kapital k = CHF 50 000.00 zu einem Zinssatz p = 1,25 % angelegt.
Der Zinssatz bleibt konstant.
Wie gross ist das Kapital mit Zinseszins nach …

A 3 Jahren? $k_3 = 50\,000 \cdot 1{,}0125^3 = 51\,898.535 \approx$ CHF 51 898.54

B 20 Jahren? $k_{20} = 50\,000 \cdot 1{,}0125^{20} \approx$ CHF 64 101.86

C x Jahren? $k_x = 50\,000 \cdot 1{,}0125^x$

4

Funktion 1

x	0	1	2	3	4	5	10	100
y	16	24	32	40	48	56	96	816

Funktion 2

x	0	1	2	3	4	5	10	200
y	16	24	36	54	81	121,5	922,64	$2{,}64 \cdot 10^{36}$

B Ergänze die Wertetabellen.

C Beschreibe das Wachstum bei der Funktion 1 mit Worten.

Immer wenn der x-Wert um 1 erhöht wird, wird zum y-Wert 8 addiert.

Es handelt sich hier um lineares Wachstum.

D Beschreibe das Wachstum bei der Funktion 2 mit Worten.

Immer wenn der x-Wert um 1 erhöht wird, wird der y-Wert mit 1,5 multipliziert.

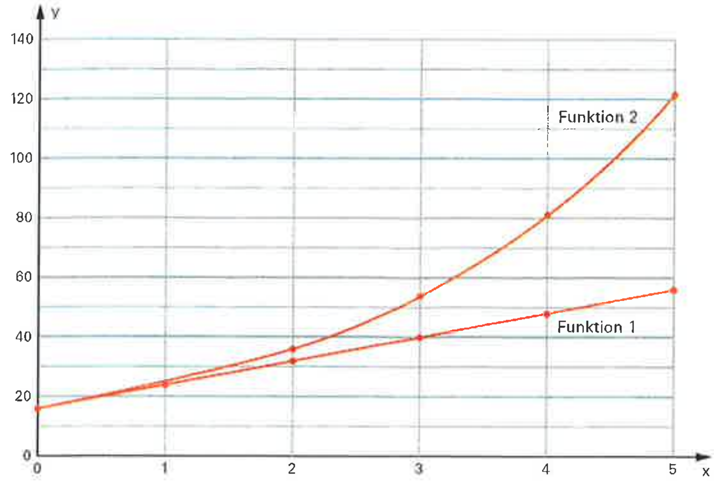
Es handelt sich hier um exponentielles Wachstum.

E Gib für jede Funktion einen Term an.

Term 1 y = $8x + 16$ oder $y = 8(x + 2)$

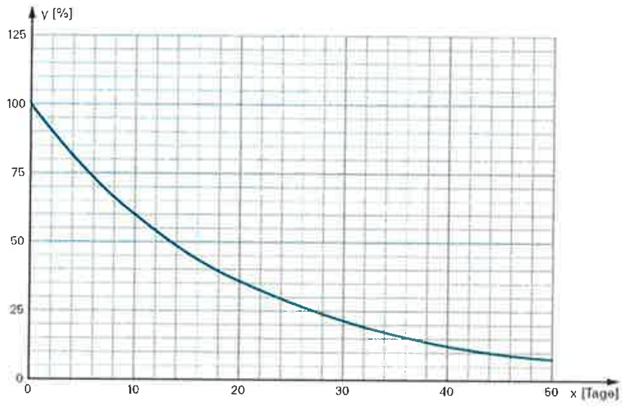
Term 2 y = $16 \cdot 1{,}5^x$

A Stelle die beiden Funktionen für x ≤ 5 grafisch dar.



5 Verabreichte Medikamente bauen sich im menschlichen Körper exponentiell ab. Von einem Wirkstoff gegen Malaria wird einem Patienten am Tag x = 0 eine einmalige Dosis verabreicht. Im Blut des Patienten lassen sich zu Beginn von dieser Dosis y = 100 % nachweisen.

Das Diagramm zeigt, wie der Wirkstoff im Körper abnimmt.



A Entnimm aus dem Diagramm die Halbwertszeit.

Die Halbwertszeit beträgt etwa 13,5 Tage.

B Ergänze die Tabelle und begründe deine Antwort in Aufgabe A anhand dieser Wertetabelle.

x [Tage]	0	13,5	27,0	40,5
y [%]	100 %	50 %	25 %	12,5 %

Nach jeweils 13,5 Tagen halbiert sich die Dosis.

C Weise durch eine Rechnung nach, dass der Körper pro Tag ziemlich genau 5 % des Wirkstoffes abbaut.

$0{,}95^{13{,}5} = 0{,}5003 \approx 0{,}50$

oder

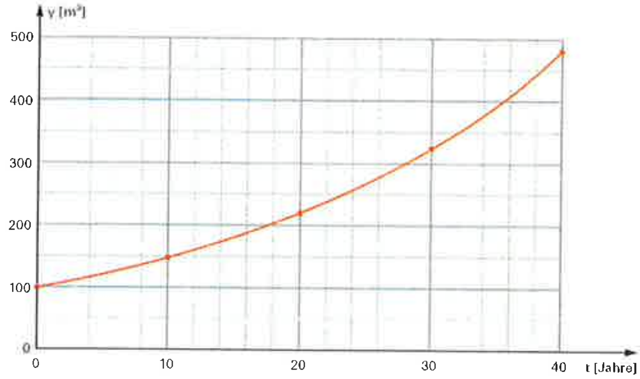
$y = 100 \cdot 0{,}95^{13{,}5} = 100 \cdot 0{,}5003 \approx 50\,\%$

6 Kann ein Jungwald ungestört wachsen, so nimmt sein Holzbestand während Jahrzehnten exponentiell zu. In einem Jungwald hat es zur Zeit x = 0 Jahre 100 m³ Holz. Der Förster erwartet, dass in den kommenden 40 Jahren der Holzbestand jährlich um 4 % zunimmt.

A Berechne die fehlenden Werte in der Tabelle.

t [Jahre]	0	10	20	30	40
y [m³]	100	148	219	324	480

B Stelle das Wachstum mit Hilfe dieser fünf Wertepaare grafisch dar.



C Schätze mithilfe der Grafik die ungefähre Verdopplungszeit.

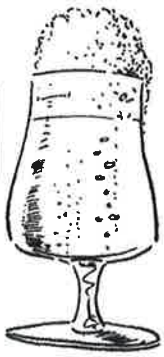
Die Verdopplungszeit beträgt ungefähr 17,5 Jahre.

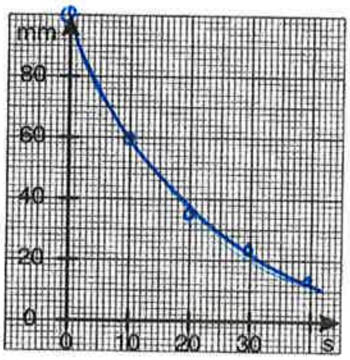
(0 Jahre / 100 m³); (17,5 Jahre / 200 m³); (35 Jahre / 400 m³)

Zusatzaufgaben

Der Schaum auf einem Glas Bier nimmt exponentiell ab.

Zeit (s)	0	10	20	30	40
Höhe (mm)	100	60	36	22	13





a) Stelle die Abnahme graphisch dar.

b) Mit welchem Faktor q erfolgt die Abnahme in je 10 s?

q = 0.60 (2 geltende Ziffern)

c) Mit welchem Faktor a erfolgt die Abnahme in jeweils 1 s?

100 → ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a → 60 (·□ 10 Faktoren)

Also: a^{10} = 0.60   a = $\sqrt[10]{0.60}$ = 0.95 (2 geltende Ziffern)

Für die Heilung von Schilddrüsenerkrankungen verwendet man radioaktives Jod – 131 mit 8 Tagen Halbwertszeit. Mit welchem Faktor a zerfällt es pro Tag?

100 → ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a □ ·a → 50 (· 0,5)

Also: a^{8} = 0.50   a = $\sqrt[8]{0.50}$ = 0.92 (2 geltende Ziffern)

Im Jahre 1993 lebten in Nigeria ca. 105 Mio. Menschen mit 2,9 % jährlichem Zuwachs. In wie vielen Jahren werden es erstmals mehr als 200 Mio. sein?

Anzahl (in Mio.) nach n Jahren: $A_n = 105 \cdot (1.029)^n \geq 200$

n	0	10	20	21	22	23		
A_n	105	140	186	191	197	203		

Antwort: In 23 Jahren werden es erstmals mehr als 200 Mio sein.

Zusatzaufgaben

In einem See nimmt die Helligkeit pro Meter Wassertiefe um 20 % ab. An der Oberfläche beträgt die Helligkeit 100 Einheiten.
Wie viele Einheiten sind es in 7 m Wassertiefe?

Helligkeit $h = 100 \cdot 0.8^x$ x = Anz. Meter Wassertiefe

$h_{7m} = 100 \cdot 0.8^7 = \underline{\underline{21}}$ Einheiten

Bei 0 °C Außentemperatur nimmt die Temperatur des Tees in einer Thermoskanne stündlich um 12 % ab. Nach 5 Stunden werden in der Kanne 42°C gemessen.
Wie heiß war der Tee beim Einfüllen?

Temperatur $T_5 = T_0 \cdot \overbrace{0.88}^{(1-\frac{12}{100})}{}^5 = 42°C \rightarrow T_0 = 42 : 0.88^5 = \underline{\underline{80°}}$

Ein Kapital ist mit 6,5% jährlichem Zinssatz in 40 Jahren mit Zins und Zinseszins auf 800 000 DM angewachsen.
Wie hoch war das Anfangskapital?

$K_{40} = K_0 \cdot (1.065)^{40} = 800'000 \text{ DM} \quad | : 1.065^{40}$

$\Rightarrow K_0 = 800'000 \text{ DM} : 1.065^{40} = \underline{\underline{64'433 \text{ DM}}}$

Der Bestand an Kaninchen in einem Park wuchs in 15 Jahren exponentiell von 30 auf 110 Kaninchen.
Wie groß ist der jährliche Wachstumsfaktor? Bestimme auch den Prozentsatz der jährlichen Zunahme.

$P_{15} = 30 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{15} = 110$

$30 \cdot p^{15} = 110 \quad | : 30$

$p^{15} = \frac{110}{30} \quad | \sqrt[15]{\ }$

$p = 1.09 \rightarrow \underline{\underline{9\%}}$ Wachstumsrate

Ein radioaktives Präparat zerfällt so, daß seine Menge stündlich um 8,3 % abnimmt. Nach wie vielen ganzen Stunden ist erstmals weniger als 1 Zehntel der Anfangsmenge vorhanden?

$\text{Material}_x = 100 \cdot \left(1 - \frac{8.3}{100}\right)^x = 10 \quad |\cdot$

$100 \cdot 0.917^x = 10 \quad | : 100$

$0.917^x = 0.1$

$\rightarrow x = \log 0.1 : \log 0.917 = 26.6$

Nach 27 Stunden ist weniger als 1/10 übrig!

Genau eine Aussage im Comic ist falsch: Kennzeichne diese!

Erstelle eine Wertetabelle und erstelle einen Graphen für $6 < x < 6$

a) $y = 1{,}5^x$ **b)** $y = 0{,}7^x$

a)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$y = 1{,}5^x$	0,13	0,2	0,3	0,44	0,67	1,0	1,5	2,25	3,4	5,1	7,6

b)

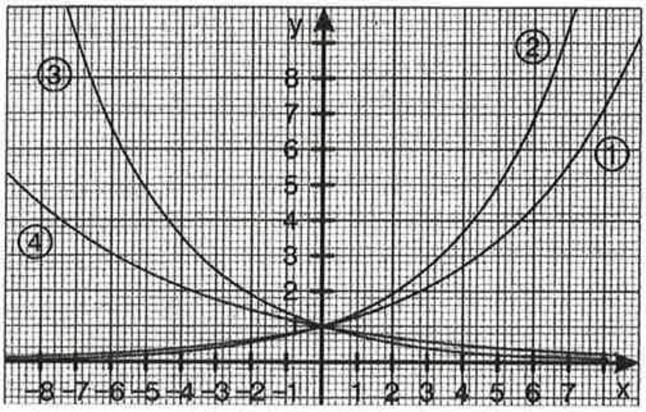
x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$y = 0{,}7^x$	5,9	4,2	2,9	2,0	1,4	1,0	0,7	0,5	0,34	0,24	0,17

Zusatzaufgaben

In der Zeichnung sind vier Exponentialfunktionen dargestellt mit den Gleichungen:

① $y = 1{,}28^x$ ② $y = 1{,}38^x$
③ $y = 0{,}73^x$ ④ $y = 0{,}83^x$

Trotz des kleinen Maßstabs kannst du entscheiden, welche Gleichung zu welchem Graphen gehört. Ordne zu.



Ein Wald enthält ungefähr 10'000 m^3 Nutzholz. Durch Nachwachsen nimmt diese Holzmenge jährlich um 2.5% zu. Wie viel m^3 Holz sind es bei diesem Wachstum in 12 Jahren?

ca. 13'450 m^3 Holz

$\text{Menge}_{12} = 10'000\ m^3 \cdot \left(1+\frac{2.5}{100}\right)^{12}$

Röntgenstrahlen werden durch Bleiplatten abgeschirmt. Pro mm Dicke der Bleiplatte nimmt die Strahlung um ca. 5% ab. Auf welchen Bruchteil nimmt die Strahlung bei 10 mm Plattendicke ab?

auf ca. 0.60 (= 60%)

$\text{Strahlung}_{10\,mm} = 100\% \cdot \left(1-\frac{5}{100}\right)^{10}$

Eine Algenkultur nimmt täglich um 30% zu. Nach 5 Tagen sind es 300 kg Algen. Wie viel waren es anfangs?

ca. 81 kg Anfangs

$\text{Algen}_5 = A_0 \cdot \left(1+\frac{30}{100}\right)^5 = 300$

$A_0 = 300 : (1.3)^5 = 80.8$

Bei jeder Wäsche verliert eine Jeans 15% ihrer Farbe. Nach wie vielen Wachvorgängen ist erstmals weniger als 20% der ursprünglichen Farbe vorhanden?

nach 10 x waschen

$\text{Farbanteil}_{20\%} = 100\% \cdot \left(1-\frac{15}{100}\right)^x = 20\%$

$100\% \cdot 0.85^x = 20\% \mid :100\%$

$x = 9.9 \approx 10$ Mal $\leftarrow$ $0.85^x = 0.2$

Pilze vermehren sich sehr rasch auf altem, schimmligen Brot. Alle 5 Minuten hat es 4 mal mehr Pilzbakterien auf einer Scheibe altem Brot. Wie viele Bakterien hat es nach 1 Stunde, wenn am Anfang 3 Bakterien auf dem Brot vorhanden waren?

$A_{60\text{ Minuten}} = \underset{\text{Anfangsbestand}}{3} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{300}{100}\right)}_{=4}^{12} = 3 \cdot 4^{12} \approx 50.3$ Millionen

$= 12 \cdot 5$ Minuten

Merkblatt