Pyramide und Kegel

LU 3.14 Pyramide & Kegel

Lösungen

Lernziele

Ich kann ...!	Ja • Nein
verschiedene Pyramiden in Würfel einzeichnen und deren Volumen berechnen. AH+ 1,2,4 und 7	
zeigen, weshalb das Volumen einer rechteckigen Pyramide 1/3 so gross ist wie dasjenige des Quaders mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. SB 3-5 und AH 3	
die Begriffe Mantelfläche, Körperhöhe, Volumen, Grundfläche, Kreissektor und Zentriwinkel richtig verwenden. Alle Aufgaben	
aus Kreissektoren Kegel formen und deren Volumen berechnen. SB 8	
Berechnungen an Pyramiden- und Kegelstümpfen durchführen. SB 11+12 und AH 6	
Optimierungsaufgaben an Pyramiden und Kegel bearbeiten und lösen. SB 9 + AH 7	
aufgrund weniger Angaben zu einem Kegel oder Pyramide die fehlenden Grössen berechnen. AH 8	
Körper zerlegen und zusammensetzen sowie Zerlegungen zum Berechnen nutzen. AH 5 + 6	

Lernlinks http://schule.omr.ch/ru oder http://www.mathbuch.info

Abgeben vor der Prüfung

- vollständig ausgefülltes und sauber geführtes Dossier
- eingeklebte Arbeitsblätter aus dem Arbeitsbuch inklusive aller dazu gemachten Notizen
- Merkblatt zur Lernumgebung
- vollständige gelöste Probeprüfung
- zusätzlich gelöste Blätter

Falls ein oder mehrere der oben erwähnten Punkte nicht erfüllt sind, hat dies negative Arbeitshaltungspunkte zur Folge.

Name Vorname Klasse

3. Sekundarklasse

Dossierkontrolle vom

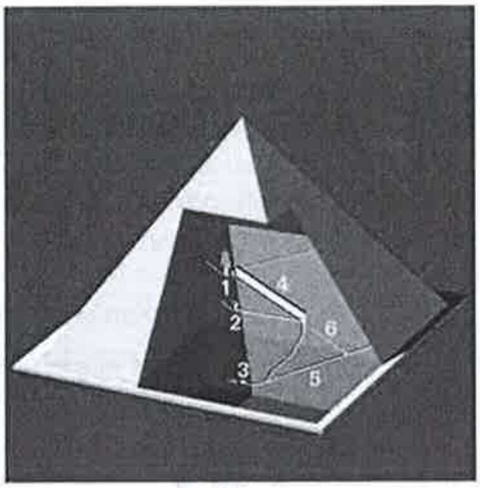
Bemerkungen

Unterschrift der Eltern

AB 1 Pyramide und Kegel

Einstieg

Die Gräber ägyptischer Pharaonen wurden mit Pyramiden überbaut. Die mächtigste dieser Pyramiden, die Cheops-Pyramide in Gizeh (um 2500 v.Chr.), zählt zu den sieben Weltwundern der Antike. Darin würden der Petersdom von Rom, der Dom von Florenz und die St. Paul's Cathedral von London zusammen Platz finden.



1 Grabkammer des Königs **2** Kammer für die Ka-Statue des Königs **3** unterirdische, unvollendete Grabkammer **4** grosse Galerie **5** nach unten führender Gang **6** nach oben führender Gang

Das Matterhorn (4476 m ü. M.) wirkt wie eine riesige Pyramide. Im Bild sind die Umrisse der Cheops-Pyramide in die Gipfelregion eingezeichnet.

Masse

Grundfläche
- Form: quadratisch
- ursprüngliche Seitenlänge: 230,4 m = 23040 cm
- heutige Seitenlänge: 227,5 m

Höhe
- ursprüngliche Höhe: 146,6 m
- heutige Höhe: 138,8 m
- ursprüngliche Höhe eines Seitendreiecks: 186,4 m

Steigungswinkel
- Aussenseiten: 52°
- Kanten: 42°
- Gänge im Innern: 26°

Volumen
- total: ca. 2 500 000 m^3
- Hohlräume: ca. 15 %

Bau

Bauweise
- übereinandergeschichtete Quader
- durchschnittliche Blockgrösse: 1,1 m^3
- Baumaterial: Sandstein, Dichte = ρ = 2,25 t/m^3

Bauzeit
- ca. 20 Jahre
- ca. 330 Arbeitstage pro Jahr

Arbeiter
- durchschnittlich ca. 4 000 Steinhauer
- bis zu 100 000 Sklaven und Bauern (zur Zeit der Nilüberflutungen August bis Oktober)

Genauigkeit des Baus: gewollt oder Zufall?
- Das Verhältnis zwischen dem Umfang der Grundfläche und der Höhe beträgt 2π.
- Der tiefstgelegene Punkt der Grundfläche liegt nur 2,5 cm unter dem höchstgelegenen Punkt der Grundfläche.
- Die Seitenlängen der Grundfläche unterscheiden sich um weniger als 20 cm.
- Der ursprüngliche Umfang der Pyramide betrug 36 524 Pyramidenzoll. Ein Jahr dauert 365,24 Tage.
- Die Pyramidenspitze liegt exakt über dem Zentrum der Grundfläche.
- Die Eckwinkel der Grundfläche sind sehr genau (Grad, min, s): 89°56'27" 90°03'02" 90°00'33" 89°59'58"
- Die Kanten sind exakt nach SO, NO, SW und NW ausgerichtet.

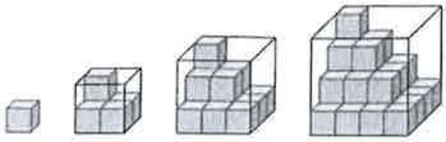
SB Auftrag 1

Baut ein massstabgetreues Modell der Cheops-Pyramide. Gebt Seitenlänge, Höhe und Massstab von eurem Modell an.

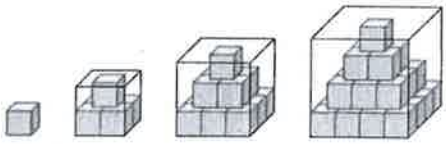
mit ursprünglichen Angaben: 1 : 3000

Seitenlänge : 230.4 m : 3000 ≈ 7.7 cm
Höhe : 146.6 m : 3000 ≈ 4.9 cm
→ siehe separates Blatt!

SB Auftrag 3
Aus Würfeln werden wie abgebildet Körper mit zunehmender Höhe gebaut. Vergleiche die beiden Folgen von Würfelbauten.



Folge 1



Folge 2

A Ergänze die Tabelle. Ein Tabellenkalkulationsprogramm erleichtert dir die Arbeit.

Kantenlänge s	Anzahl Würfel Grundfläche	Anzahl Würfel im Umwürfel	Anzahl Würfel in der Pyramide	Anzahl Würfel im Umwürfel / Anzahl Würfel in der Pyramide
1	1	1	1	1,000
2	$= 2^2 = 2\cdot2$ 4	$= 2^3 = 2\cdot2\cdot2$ 8	4 + 1 = 5	$\frac{8}{5}$ = 1,600
3	$= 3^2 = 3\cdot3$ 9	$= 3^3 = 3\cdot3\cdot3$ 27	9 + 5 14	$\frac{27}{14}$ = 1.9286
4	16	64	30	2.1333
5	25	125	55	2.2727
1 0~~00~~	100	1000	385	2.5974
50	2500	125'000	42'925	2.9121
200	40'000	8'000'000	2'686'700	2.9776
500	250'000	125'000'000	41'791'750	2.9910
1000	1'000'000	1'000'000'000	333'833'500	2.9955

B Erkläre, wie sich die Zahlen in der Tabelle aus der Kantenlänge berechnen lassen.

siehe die ersten 3 Zeilen

C Erkläre, wie sich die Zahlen in der Tabelle aus der Kantenlänge berechnen lassen.

siehe die ersten 3 Zeilen

D
Welchem Wert nähert sich der Quotient (letzte Spalte) mit zunehmender Kantenlänge?

Der Wert nähert sich immer mehr der Zahl 3!

E
Wie lässt sich das Pyramidenvolumen aus dem Würfelvolumen berechnen?

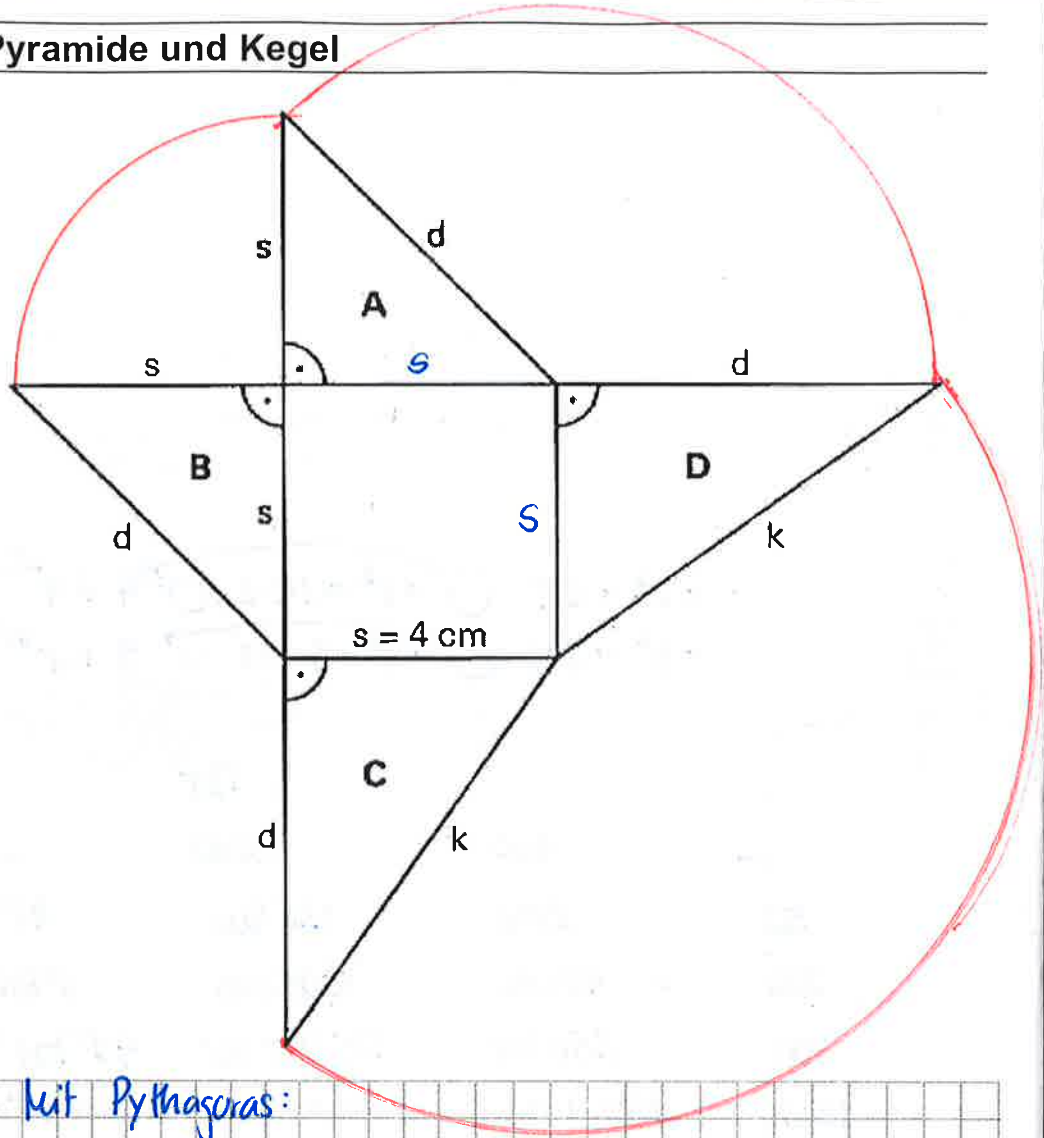
Das Volumen der Pyramide = Grundfläche · Höhe : 3

SB Auftrag 4

A
Berechne die Seitenlängen d und k im abgebildeten Pyramidennetz.

B Konstruiere das Pyramidennetz und stelle die Pyramide her (Kanten mit Klebeband fixieren).

C Zeige, wie drei solche Pyramiden zu einem Würfel zusammengesetzt werden können.



Mit Pythagoras:

$d = \sqrt{s^2 + s^2} = \sqrt{(4cm)^2 + (4cm)^2} = \sqrt{16cm^2 + 16cm^2}$
$= \sqrt{32cm^2} \approx \underline{\underline{5.66\ cm}}$

$k = \sqrt{s^2 + d^2} = \sqrt{(4cm)^2 + 32cm^2} = \sqrt{16cm^2 + 32cm^2}$
$= \sqrt{48\ cm^2} \approx \underline{\underline{6.93\ cm}}$

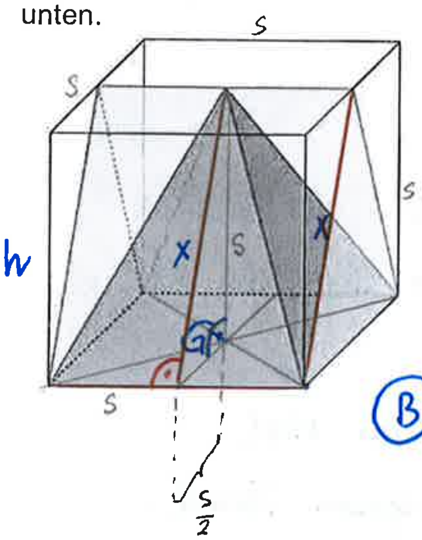
SB Auftrag 5

A
Zeige mit den Erkenntnissen aus den Aufgaben ~~2~~ und ~~3~~, dass für das Volumen einer Pyramide
3 + 4

$V_{Pyramide} = 1/3 \cdot G \cdot h$

gilt.

B
Vergleiche Volumen und Oberfläche der Pyramide und des Prismas im Würfel unten.



(A) Aus Auftrag 3 wissen wir, dass der Quotient sich immer mehr der Zahl 3 nähert, je mehr von diesen kleinen Würfel man rechnet.

Aus Auftrag 4 findet man heraus, dass 3 dieser Pyramiden genau einen Würfel ergeben.

=) Das Volumen einer Pyramide ist gleich 1/3 des entsprechenden Würfelvolumens!

$$V_{Pyramide} = \underline{\underline{G \cdot h : 3}}$$

(B)

$$V_{Pyramide} = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$V_{Prisma} = \frac{G \cdot h}{2}$$
(Dreiecksprisma)

$$x = \sqrt{s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{s^2 + \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}s^2}$$
$$= \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot s$$

$$\text{Oberfläche } S_{Pyramide} = \text{Grundfläche} + 4 \text{ Seitenflächen}$$
$$= s \cdot s = s^2 + 4 \cdot s \cdot x : 2$$
$$= s^2 + 4 \cdot s \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot s : 2$$
$$= \underline{\underline{s^2 + 2 \cdot s^2 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}}}$$

+s²

$$\text{Oberfläche } S_{Prisma} = \text{„Boden"} + 2 \cdot \text{Seiten} + 2 \cdot \text{Seiten}$$
$$= s^2 + s^2 + 2 \cdot s \cdot x$$
$$= 2s^2 + 2 \cdot s \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot s$$
$$= \underline{\underline{2s^2 + 2s^2 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}}}$$

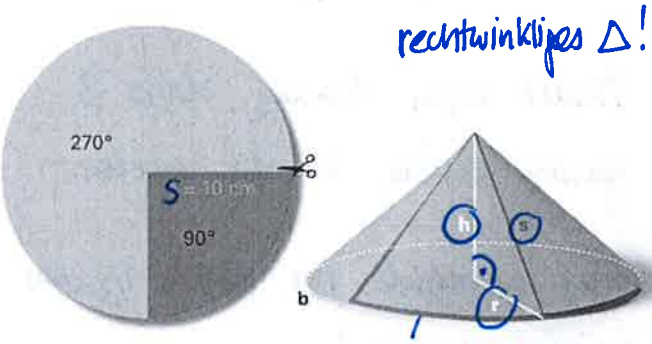
Die Oberfläche des Prismas ist um s^2 grösser als die Oberfläche der Pyramide.

AB 5 Pyramide und Kegel

SB Auftrag 8

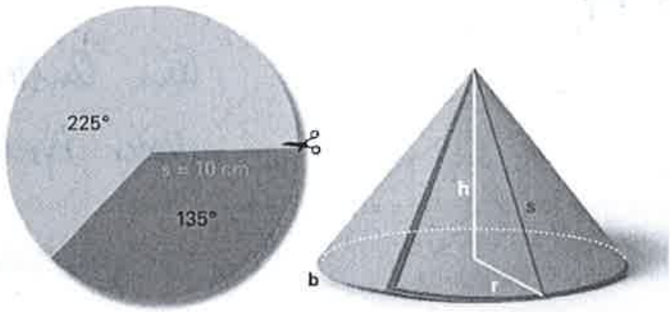
A Forme aus Papierkreisen mit dem Radius s = 10 cm Kreiskegel. Schneide jeweils einen Radius ein und wählt Kreissektoren mit d = 315°, 300°, 270°, 225°, 180°. Welche Zentriwinkel führen zu Kegeln mit möglichst grossem Volumen? Schätze.
B Wie berechnet man bei gegebenem Winkel des Kreissektors den Kegelradius? Wie gross ist die Grundfläche des Kegels? Was wird aus dem Kreisradius s, wenn man den Sektor zum Kegelmantel

rechtwinkliges Δ!



M = Kreissektor mit α = 270°

$r = \frac{270°}{360°} \cdot s$



M = Kreissektor mit α = 225°

$r = \frac{225°}{360°} \cdot s$

$$U_r = \frac{270}{360} \cdot U_s$$

$$2 \cdot r \cdot \pi = \frac{270}{360} \cdot 2 \cdot s \cdot \pi \quad |: 2 \cdot \pi$$

$$r = \frac{270}{360} \cdot s$$

(Herleitung)!

(A) Zentriwinkel die grösser als 180°, aber kleiner als 360° sind. Das Maximum liegt um 300°

(B) Wenn $\alpha = 300°$ und $s = 10$ cm sind, berechnet man r gemäss folgender Formel:

$$r = \frac{300°}{360°} \cdot 10\text{cm} \approx \underline{\underline{8.\overline{3}\text{ cm}}}$$

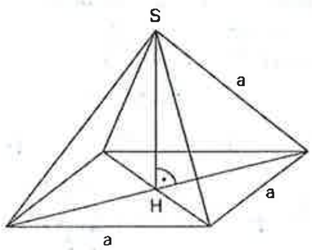
Grundfläche des Kegels:

$$A_O = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{\alpha}{360} \cdot s\right)^2 \cdot \pi$$

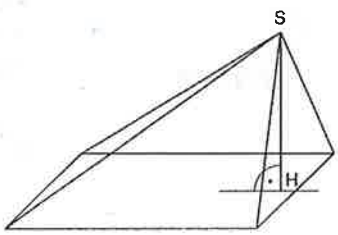
Aus dem Kreisradius s ~~wird~~ des Sektors wird eine Mantellinie des Kegels.

Gemäss Pythagoras gilt $s^2 = h^2 + r^2$

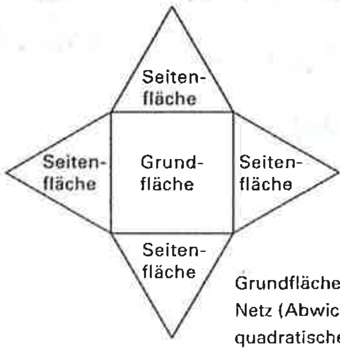
Merke:



gerade, quadratische Pyramide



schiefe Pyramide mit rechteckiger Grundfläche



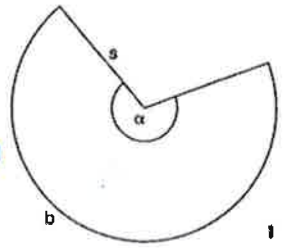
Grundfläche, Seitenfläche [4x]
Netz (Abwicklung) einer geraden, quadratischen Pyramide. Die vier Seitenflächen ergeben die Mantelfläche.

SB Auftrag 9
Für welchen Sektorwinkel umfasst der Kegelmantel mit s = 10 cm das grösste Kegelvolumen? Löse mit Hilfe der Tabelle.

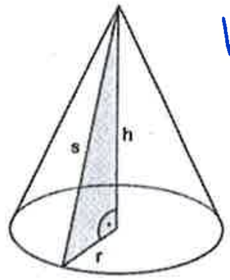
$r = \frac{\alpha}{360°} \cdot s$

$h = \sqrt{s^2 - r^2}$ (Pythagoras)

$V = \underbrace{r^2 \cdot \pi}_{G} \cdot h : 3$



I $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi s$



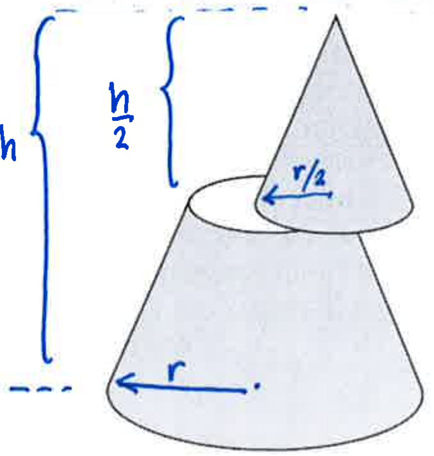
II $b = 2\pi r$

$r = \frac{60}{360} \cdot 10\,cm$ $h = \sqrt{10^2 - 1.67^2}$

α	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
b in cm											
r in cm	1.67	2.50	3.33	4.17	5.00	5.83	6.67	7.50	8.33	9.17	10
h in cm	9.86	9.68	9.43	9.09	8.66	8.12	7.45	6.61	5.53	4.00	0
V in cm³	28.7	63.4	110	165	227	289	347	390	402	352	0

$= r^2 \cdot \pi \cdot h : 3$

SB Auftrag 11



Parallel zur Grundfläche wird ein Schnitt durch einen Kegel geführt.
A Wie gross ist das Volumen des kleinen Kegels im Vergleich zum ursprünglichen, wenn der Schnitt auf halber Höhe geführt wird?
B Auf welcher Höhe müsste man einen Kegel durchschneiden, damit beide Teile genau das gleiche Volumen haben?

A Der Radius und die Höhe des kleinen Kegels sind nur noch halb so gross wie ursprünglich!

$\rightarrow V_K = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{h}{2} : 3 = \frac{r^2}{4} \cdot \pi \cdot \frac{h}{2} \cdot \pi : 3 = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{24}$

$V_G = r^2 \cdot \pi \cdot h : 3 = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$

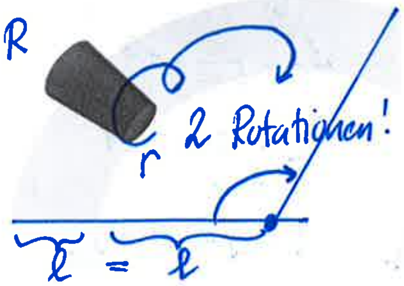
Das Volumen ist 8 x kleiner! 8 • kleiner!

B

SB Auftrag 12

Stelle einen Kegelstumpf her, der beim Abrollen auf dem Boden (ohne zu gleiten) genau zwei Eigenrotationen für einen vollen Umlauf braucht. Notiere übersichtlich deine Überlegeungen und deine Lösungsschritte.

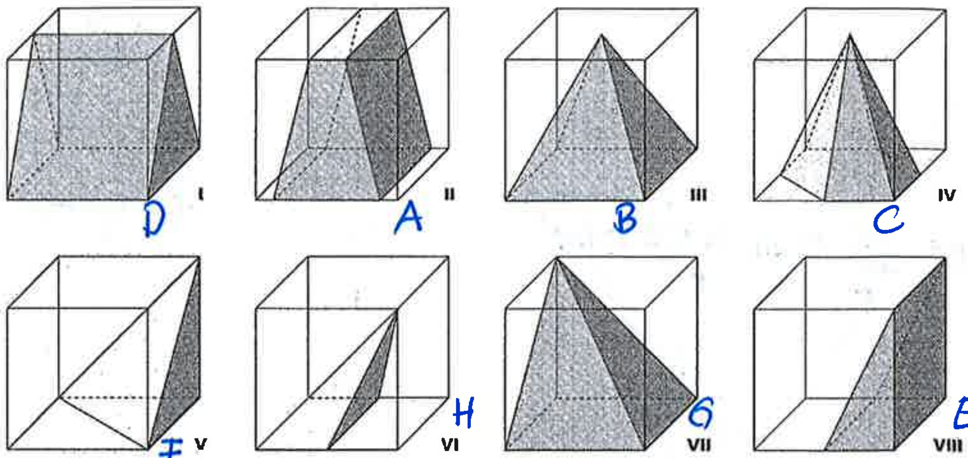
Dies funktioniert nur, wenn der Umfang des unteren Kegelkreises halb so gross ist wie der Umfang des Kreises beim Abrollen! Das bedeutet, dass der (Mantel-) Sektorwinkel 180° sein müsste!



Übung 1

Ordne die Beschreibungen A bis H den Körpern I bis VIII zu. Diese sind jeweils in einen Würfel eingezeichnet.

- A Prisma mt trapezförmiger, gleichschenkliger Grundfläche
- B gerade, quadratische Pyramide
- C gerade Pyramide mit sechseckiger Grundlfäche
- D Prisma mit dreieckiger, gleichschenkliger Grundfl.
- E Prisma mit rechtwinkliger, dreieckiger Grundfl.
- F schiefe Pyramide mit dreieckiger, rechtwinklig-gleichschenkliger Grundfl.
- G schiefe Pyramide mit quadratischer Grundfl.
- H schiefe Pyramide mit rechteckiger Grundfl.



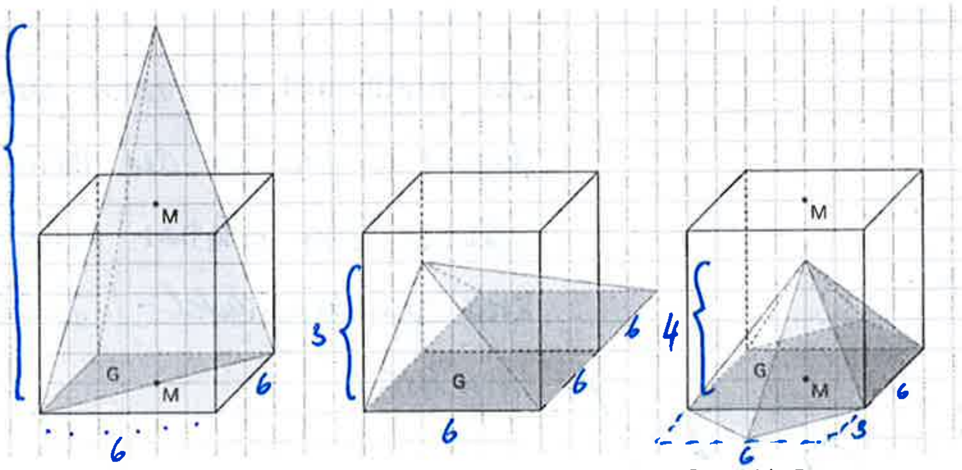
Gib die Volumen der acht Körper als Bruchteil und in Prozent des Würfels an:

Körper	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Bruchteil	$1/2$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/6$	$1/6$	$1/3$	$1/4$
Prozent	50%	50%	$33\frac{1}{3}$%	25%	$16.\bar{6}$%	$16.\bar{6}$%	$33.\bar{3}$%	25%

Übung 2

A

Zeige, dass die drei Pyramiden das gleiche Volumen 12 haben.



Pyramide 1

$G = 6 \cdot 6 : 2 = 18$
$h = 12$
$V = G \cdot h : 3 = \underline{72}$

Pyramide 2

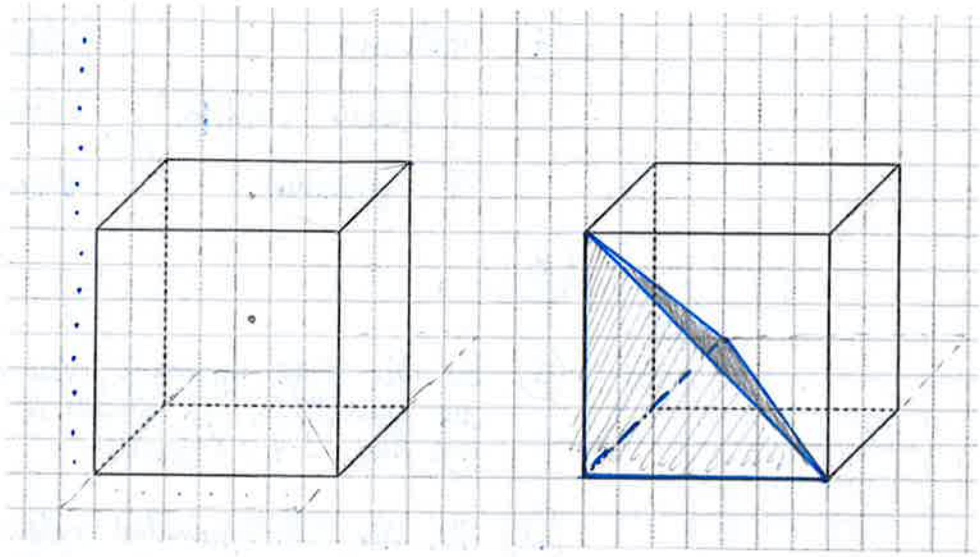
$G = 6 \cdot 12 = 72$
$h = 3$
$V = 3 \cdot 72 : 3 = \underline{\underline{72}}$

Pyramide 3

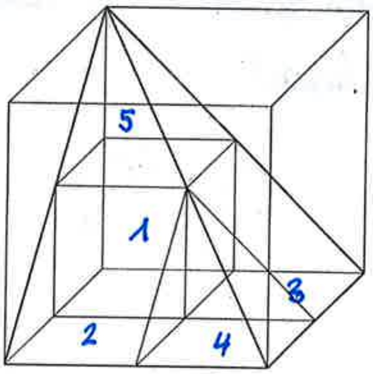
$G = 9 \cdot 6 = 54$
$h = 4$
$V = 54 \cdot 4 : 3 = \underline{\underline{72}}$

Übung 2

B
Zeichne zwei Pyramiden mit nicht rechteckiger Grundfläche, deren Volumen ein Drittel so gross wie das Würfelvolumen ist.



Übung 3
Die im Würfel eingezeichnete Pyramide wird auf halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten. Der unterer Teil wird „Pyramidenstumpf“ genannt.. Aus dem Pyramidenstumpf kann man mit geraden Schnitten einen Würfel ausschneiden. So entstehen insgesamt fünf Teilkörper aus der ursprünglichen Pyramide.



Beschreibe die fünf Teilkörper genauer:

1 Würfel (hintere linke Ecke)

2 Dreiecksprisma mit rechtwinklig gleichschenkliger Grundfläche.

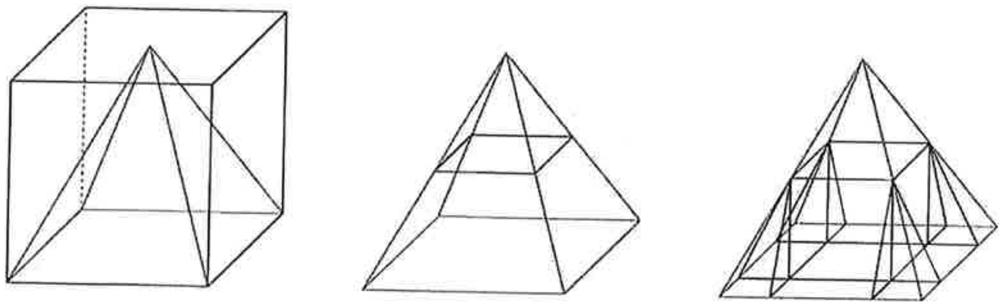
3 siehe 2.

4 Pyramide mit quadratischer Grundfläche

5 " siehe 4.

Zeige, dass das Volumen der fünf Teilkörper ein Drittel des grossen Würfel beträgt!

Übung 4
Einem Würfel ist eine gerade, quadratische Pyramide einbeschrieben. Sie wird in Teilkörper zerlegt:
Die Pyramide wird auf halber Höhe geschnitten. Aus dem Pyramidenstumpf werden ein Würfel und acht weitere Teilkörper ausgeschnitten



$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Würfel}$

A wie viele der zehn Teilkörper sind Prismen, wie viele Quader, wie viele Pyramiden?
B Vergleiche die Volumen der Teilkörper.
C Begründe: Das Volumen P der oberen, kleinen Pyramide ist 1/8 ursprünglichen Pyramidenvolumens.
D Begründe: Das Volumen der vier Eckteile zusammen beträgt ebenfalls P.
E Begründe: Das Volumen W des kleinen Würfels ist gleich gross wie das Volumen der vier Keile.
F Zeige, dass das Volumen der grossen, geraden, quadratischen Pyramide 1/3 des grossen Würfelvolumens beträgt.

(A) 4 Prisma — Volumen V/2
1 Quader (Würfel) — Volumen V
5 Pyramiden — Volumen V/3 und V/12

(B)

(C) Da die obere Pyramide nur halb so gross ist und die Grundfläche 4x kleiner ist, sinkt das Volumen um das 2·4 = 8-fache!

(D) Die vier Eck-Pyramiden ergeben zusammen das Volumen P! Weil sie zwar die gleiche Höhe haben, die Grundfläche aber jeweils 4 x kleiner ist.

(E) Die 4 Δ's Prismen ergeben einen Würfel, da je 2 zusammen genau einem halben Würfel entsprechen!

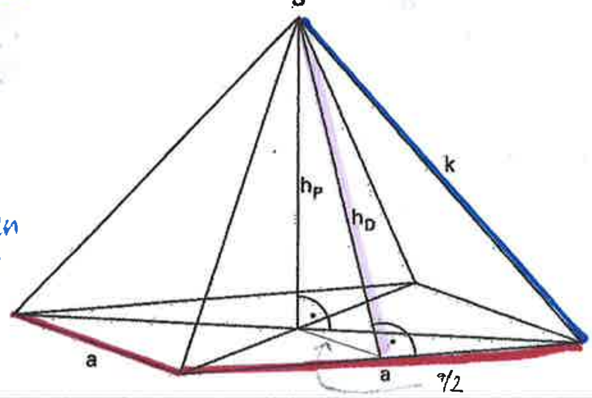
(F) sh. Vorderseite!

Übung 5
Berechne die fehlenden Angaben für Pyramiden mit quadratischer Grundfläche.

Nach Pythagoras gilt:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_P^2 = h_D^2$$
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_D^2 = k^2$$

damit lassen sich h_P und h_D ausrechnen!

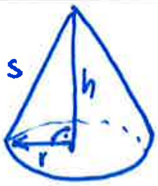


die 4 Dreiecksflächen zusammen!

a in cm	k in cm	Dreiecks-höhe h_D in cm	Körperhöhe h_P in cm	Mantelfläche M in cm^2 $4 \cdot \triangle = 4 \cdot g \cdot h : 2$	Volumen V in cm^3 $G \cdot h : 3 = a^2 \cdot h_P : 3$
12	10	$\sqrt{10^2-6^2} = 8$ cm	$\sqrt{8^2-6^2} \approx 5.3$ $\sqrt{64-36} = \sqrt{28}$	$4 \cdot a \cdot h_D : 2$ $4 \cdot 12 \cdot 8 : 2 = 192$	$12 \cdot 12 \cdot \sqrt{28} : 3$ $= 253.99$
14	12	$\sqrt{12^2-7^2} \approx 9.7$ $\sqrt{144-49} = \sqrt{95}$	$\sqrt{95-7^2} = \sqrt{46}$ ≈ 6.8	$4 \cdot 14 \cdot \sqrt{95} : 2$ $= 272.9$	$14 \cdot 14 \cdot \sqrt{46} : 3$ $= 443.1$
16	14	$\sqrt{14^2-8^2} \approx 11.5$ $\sqrt{196-64} = \sqrt{132}$	$\sqrt{132-8^2} = \sqrt{68}$ ≈ 8.2	$4 \cdot 16 \cdot \sqrt{132} : 2$ $= 367.7$	$16 \cdot 16 \cdot \sqrt{68} : 3$ $= 703.7$
20	20	$\sqrt{20^2-10^2} \approx 17.3$ $\sqrt{400-100} = \sqrt{300}$	$\sqrt{300-10^2} = \sqrt{200}$ ≈ 14.1	$4 \cdot 20 \cdot \sqrt{300} : 2$ $= 692.8$	$20 \cdot 20 \cdot \sqrt{200} : 3$ $= 1885.6$

Übung 6

Berechne die fehlenden Angaben zu den **Kegeln.**



$r = \frac{\alpha}{360°} \cdot s$

$h = \sqrt{s^2 - r^2}$

	s [cm]	α [°]	b [cm]	r [cm]	Grundfläche [cm²]	h [cm]	Mantelfläche [cm²]	Volumen [cm³]
			$\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi \cdot s$	$\frac{\alpha}{360} \cdot s$	$r^2 \cdot \pi$		$M = \pi \cdot r \cdot s$	$r^2 \cdot \pi \cdot h : 3$
A	5,00	180	15,71	2,50	19,63	4,33	$\pi \cdot 2.5 \cdot 5 = 39.27$	$2.5^2 \cdot \pi \cdot 4.33 : 3 \approx 28.34$
B	5,00	240	20,94	3,33	34,91	$\sqrt{5^2 - 3.3^2} \approx 3.73$	52.36	43.40
C	5,00	300	26,18	4,17	54.63	2.76	65.45	50.24
D	5,00	320	27.93	4.45	62.21	2.28	69.81	47.27
E	6	180	18.85	3.00	28.25	5,20	56,55	48,97
F	6	240	25.13	4.00	50.29	4,47	75.40	74,93
G	6	300	31.41	5.00	78.46	3,32	94.23	86,83
H	6	320	33,51	5.33	89.25	2.75	100.5	81,88
I	7	200	24,43	3.89	47.54	5.82	85.~~52~~ 49	92.~~22~~ 13
K	7	240	29.34	4,67	68.51	5.21	102.~~63~~ 77	119.1
L	7	280	34.21	5.44	93,12	4.~~45~~ 40	119.73	~~138.1~~ 136.57
M	7	320	39.10	6.22	121.~~5~~ 63	3.21	136,83	130.01
N	–	–	31,42	5	–	–	–	–

Bei welchen Aufgaben hat es Angaben, die man aus den andern berechnen könnte?

Bei welchen Aufgaben sind nicht genügend Angaben zur Berechnung der andern Grössen vorhanden?

Formeln und deren umgestellte Varianten

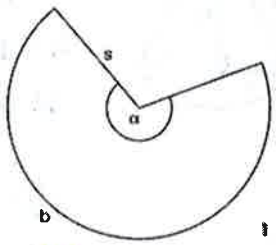
Übung 7

Für welchen Sektorwinkel umfasst der Kegelmante mit s = ~~10~~ cm das grösste Kegelvolumen? Löse mit Hilfe der Tabelle.

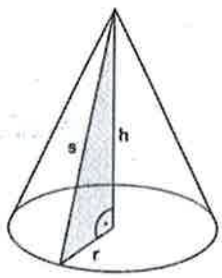
8 cm

$r = \frac{\alpha}{360°} \cdot s$

$h = \sqrt{s^2 - r^2}$



I $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi s$



II $b = 2\pi r$

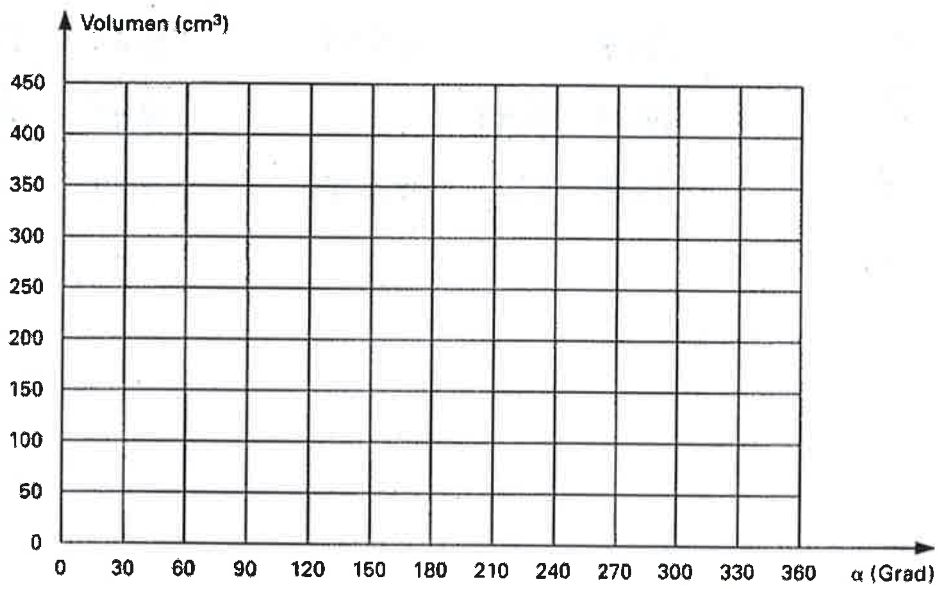
Repetition zu SB 9! mit Computer

α	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
b in cm											
r in cm											
h in cm											
V in cm³											

A Aus der Tabelle in Aufgabe 1 kann man entnehmen, in welchem Bereich der «optimale» Winkel α etwa liegt. Bestimme den optimalen Winkel α auf Grad genau.

B Berechnet mit dem Rechner (oder mit Tabellenkalkulation) die Abhängigkeit des Kegelvolumens vom Winkel α und stellt das Ergebnis grafisch dar.

7 Aus der Tabelle von Aufgabe ~~8~~ kannst du entnehmen, in welchem Bereich der „optimale Winkel" Alpha liegen muss. Bestimmen den optimalen Winkel anhand der folgenden Tabelle auf ganze Grad genau. Zeichne dann den Graphen dazu.



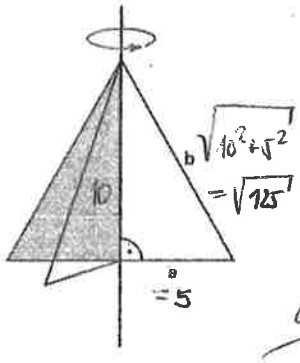
Mit Computer!

α	290°	291°	292°°	293°	294°	295°	296°	297°	298°	299°	300°
b in cm											
r in cm											
h in cm											
V in cm³											

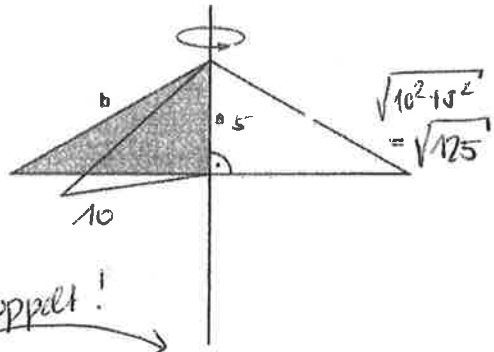
Übung 8

Ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten von 5cm und 10 cm Länge rotiert um die längere bzw. um die kürzere Kathete (siehe Bild). Bei beiden wird ein kegelförmiger Raum überstrichen.

a) Berechne die Volumen der beiden Kegel und vergleiche.
b) Berechne die Mantelflächen und vergleiche.



doppelt!



a) $V = 5^2 \cdot \pi \cdot 10 : 3 = \frac{250\,\pi}{3} = 83\frac{1}{3}\pi = 261{,}8\ cm^3$

$V = 10^2 \cdot \pi \cdot 5 : 3 = \frac{500 \cdot \pi}{3} = 166\frac{2}{3}\pi = 523{,}6\ cm^3$

doppelt!

b) $M = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{125} = \underline{\underline{175{,}6\ cm^2}}$

$M = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 10\ \sqrt{125} = \underline{\underline{175{,}6\ cm^2}}$

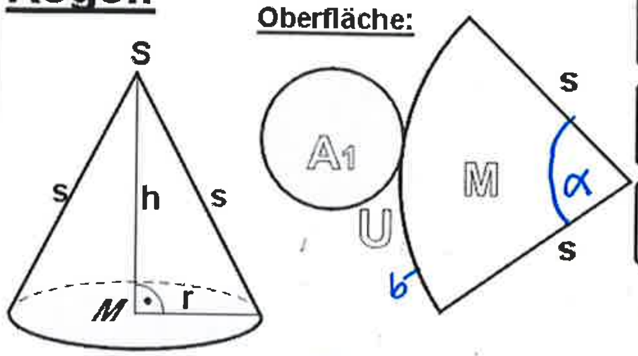
Theorie

$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot 2 \cdot s$

$\frac{\alpha}{360°} = \frac{r}{s}$

$r = \frac{\alpha}{360°} \cdot s$

Kegel:



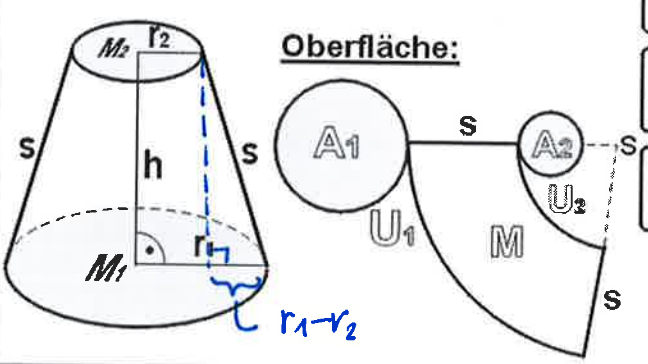
$\boxed{s = \sqrt{h^2 + r^2}}$

$\boxed{V = \pi \cdot r^2 \cdot h : 3}$

$\boxed{O = r^2 \cdot \pi + M}$

$M = \pi \cdot r \cdot s$

Kegelstumpf:



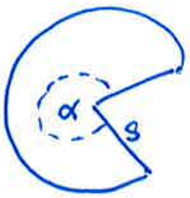
$\boxed{s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}}$

$\boxed{V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)}$

$\boxed{O = \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2 + \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)}$

$M = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$

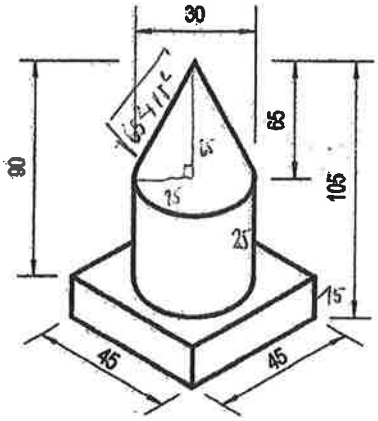
Formeln



$r = \frac{\alpha}{360°} \cdot s$!!

Zusatz

Berechne Oberfläche und Volumen! Masse in cm.



$O = 11'542{,}9\,cm^2$

$V = 63'361{,}7\,cm^3$

$V = \;+\;+\;$

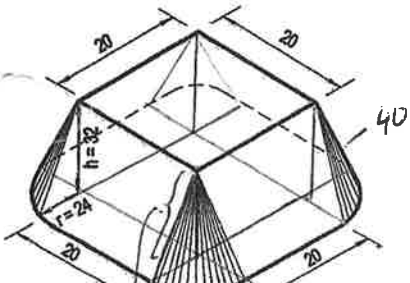
$= 45^2 \cdot 15 + 15^2 \cdot \pi \cdot 25 + 15^2 \cdot \pi \cdot 65/3$

$= 30'375 + 17'671{,}459 + 15'315{,}26$

$= \underline{\underline{63'361{,}7\,cm^3}}$

$O = 45^2 + 4 \cdot 45 \cdot 15 + 45^2 - 15^2 \cdot \pi$
$+ 30 \cdot \pi \cdot 25 + 15 \cdot \sqrt{65^2 + 15^2} \cdot \pi$

$= 2025 + 2700 + 2025 - 706{,}9$
$+ 2356{,}2 + 3143{,}6 = \underline{\underline{11'542{,}9\,cm^2}}$



$\sqrt{32^2 + 20^2} = 40$

$O = 10'745{,}5\,dm^2$

$V = 62'821{,}9\,dm^3$

$V = \;+ 4 \cdot \;+\;$

$= 20 \cdot 20 \cdot 32 + 4 \cdot \frac{24 \cdot 32}{2} \cdot 20 + 24^2 \cdot \pi \cdot 32 : 3$

$= 12'800 + 30'720 + 57'905{,}8 : 3$

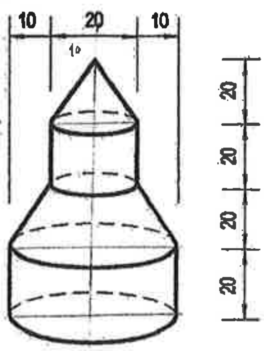
$= \underline{\underline{62'821{,}9\,cm^3}}$

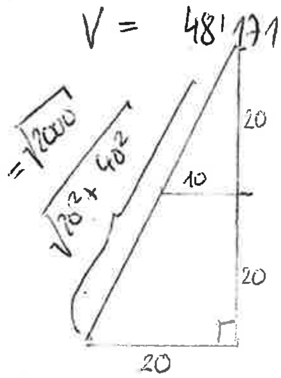
$O = 20^2 + 4 \cdot 40 \cdot 20 + \pi \cdot 24 \cdot 40$
$+ 24^2 \cdot \pi + 24 \cdot 20 \cdot 4 + 20^2$

$= \underline{\underline{10'745{,}5\,cm^2}}$

$O = 7'836{,}5\,cm^2$

$V = 48'171{,}1\,cm^3$





$V = \;+\;+\;$

$= \frac{20^2 \cdot \pi \cdot 40}{3} + 10^2 \cdot \pi \cdot 20 + 20^2 \cdot \pi \cdot 20 +$

$= 16'755{,}1 + 6283{,}2 + 25'132{,}7$

$= \underline{\underline{48'171{,}1\,cm^3}}$

$O = \;+\;+\;+\;$

M

$= \pi \cdot r \cdot s + 2r \cdot \pi \cdot h + 2r \cdot \pi \cdot h + r^2$

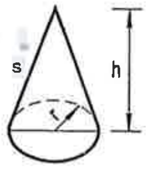
$= \pi \cdot 20 \cdot \sqrt{2000} + 2 \cdot 10 \cdot \pi \cdot 20 + 2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot 20 + 20^2 \cdot \pi$ *

Zusatzaufgaben 1

Notiere zu jeder Zelle den Lösungsweg!

Berechne die fehlenden Tabellenwerte, welche zu geraden Kreiskegeln gehören ($\pi = 3.14$, 2 Stellen).

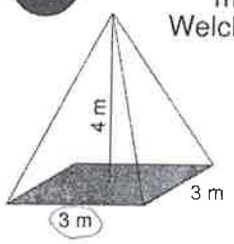
	r	h	s	G	V
a)	4.5 cm	15 cm	15.66 cm	63.59 cm²	317.91 cm³
b)	7 cm	52 cm	52.47 cm	153.86 cm²	2 666.91 cm³
c)	3 cm	13.5 cm	13.83 cm	28.26 cm²	127.17 cm³
d)	4.5 cm	60 cm	60.17 cm	63.585 cm²	1'217.7 cm³
e)	22 cm	2.49 cm	22.14 cm	1 519.76 cm²	1'259.31 cm³
f)	17.5 cm	200 cm	200.76 cm	961.63 cm²	64 108.33 cm³



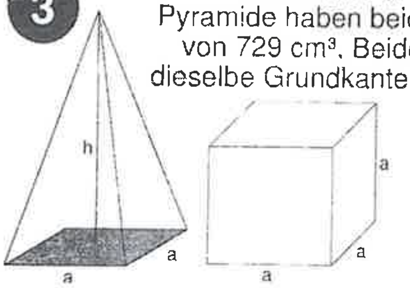
Zusatzaufgaben 2
aus Mathe zum Schmunzeln 9/10

1 Eine quadratische Pyramide, die 12 cm hoch ist, hat ein Volumen von 144 cm³. Wie groß ist die Seitenkante a?

2 Ein Turmdach in Pyramidenform soll mit Schiefer eingedeckt werden. Welchen Rechnungsbetrag schreibt Dachdecker Roofkaputt auf, wenn er für 1 m² Kosten in Höhe von 85 € berechnet?



3 Ein Würfel und eine quadratische Pyramide haben beide ein Volumen von 729 cm³. Beide Körper haben dieselbe Grundkante a. Wie hoch ist die Pyramide?



4 Die Höhe der Cheopspyramide in Ägypten betrug früher 146,5 m, jetzt misst sie 137 m. Die Kante der quadratischen Grundfläche betrug 232,5 m, jetzt misst sie 227,5 m. Wie viel Material (in m³) ist im Laufe der Jahrhunderte verwittert? Runde jeweils auf volle m³.

1

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$
$$144 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 12$$
$$12 = \frac{1}{3} \cdot a^2$$
$$36 = a^2$$
$$a = 6\ (cm)$$

6

2

$h^* = \sqrt{4^2 + \cancel{3}^2}$ 1.5 $\qquad M = 4 \cdot A_{Dreieck}$

$h^* = 5\ (cm) \qquad M = 4 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5)$

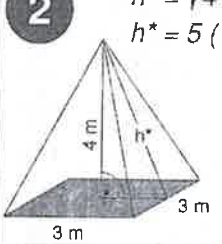
$M = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$M = 30\ (m^2)$

$Kosten = 30 \cdot 85$

$Kosten =$ ~~2550 €~~

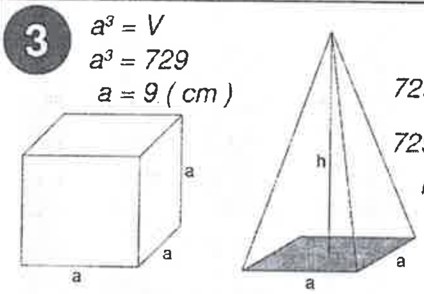
2178.72 € ~~2550~~



3

$a^3 = V$
$a^3 = 729$
$a = 9\ (cm)$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$
$$729 = \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot h$$
$$729 = 27 \cdot h$$
$$h = 27\ (cm)$$



27

4 Die Höhe der Cheopspyramide in Ägypten betrug früher 146,5 m, jetzt misst sie 137 m. Die Kante der quadratischen Grundfläche betrug 232,5 m, jetzt misst sie 227,5 m. Wie viel Material (in m³) ist im Laufe der Jahrhunderte verwittert? Runde jeweils auf volle m³.

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V_{alt} = \frac{1}{3} \cdot 232{,}5^2 \cdot 146{,}5 \qquad V_{neu} = \frac{1}{3} \cdot 227{,}5^2 \cdot 137$

$V_{alt} \approx 2639747\ (m^3) \qquad V_{neu} \approx 2363535\ (m^3)$

$V_{verwittert} = 276212\ (m^3)$

276212