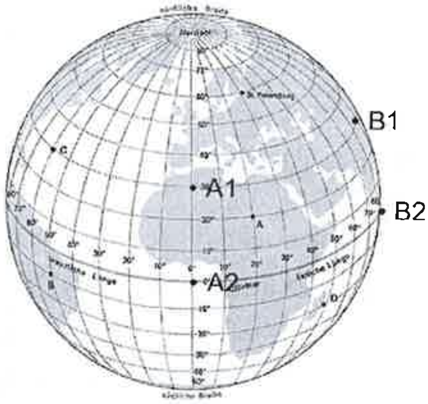
Kugelrund

Lernumgebung 3.25

Lösungen



- **Lernziele**
-

Ich kann ...	Ja • Nein
Die Grundansprüche der folgenden Lernumgebungen werden vorausgesetzt: - LU 3.09 „Ähnlichkeit" - LU 3.14 „Pyramide und Kegel"	
Zusätzlich kann ich ...	
Formeln für Kugelvolumen und Kugeloberfläche herleiten. SB 1+2	
Beziehungen zwischen Kreisformel und Kugelformeln erkennen. AH+ 3	
An Kugeln verschiedene Berechnungen durchführen. SB 4 und alle im Dossier gelösten Berechnungen.	
Ähnlichkeitseigenschaften verschieden grosser Kugel erkennen. AH+ 6	

Lernlinks **http://schule.omr.ch/ru oder http://www.mathbuch.info**

Name Vorname Klasse

3. Sekundarklasse

Dossierkontrolle vom
Beurteilung
Bemerkungen

Unterschrift der Eltern

Einleitung

Genauso wenig, wie man einen Kreis mit Einheitsquadraten tapezieren kann, kann man eine Kugeloberfläche damit lückenlos bedecken. Ebenso lässt sich eine Kugel nicht mit Einheitswürfeln füllen. Es braucht andere Zugänge, die Oberfläche und das Volumen einer Kugel zu bestimmen. Im Verlauf der Geschichte wurden dafür auch experimentelle Zugänge entwickelt.

Kugeloberfläche bestimmen

Die Hülle einer Kugel ist eine Fläche. Sie lässt sich aber nicht flach ausbreiten. Das gibt Probleme. beispielsweise bei der Herstellung von Fuss- oder Handbällen. Man versucht daher, die Kugeloberfläche durch eine Annäherung zu erreichen. Die Oberfläche wird wie bei den Bällen mit kleinen Teilflächen zusammengesetzt. Erstaunlich ist, dass diese Überlegung zu einer einfachen Formel für die Kugeloberfläche führt.

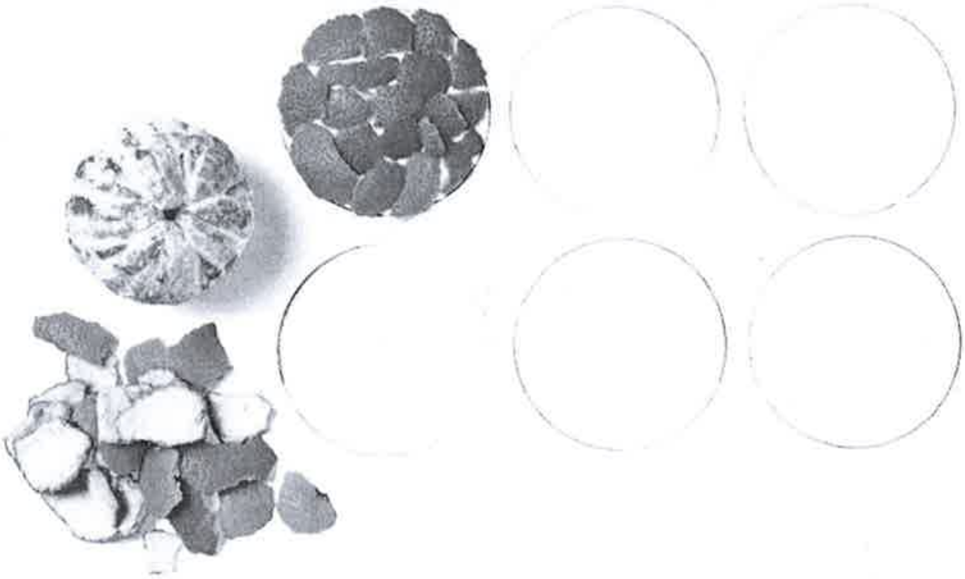
Schulbuch Auftrag SB 1
Löse die folgenden Aufträge auf ein separates Blatt, welches du dann hier einklebst!

A
Bestimme bei einem Apfel oder einer Orange den Durchmesser.
Zeichne Kreise mit diesem Durchmesser.

B
Schäle den Apfel oder die Orange. Lege die Schalenstücke möglichst lückenlos in die Kreise. Wie viele solche Kreise kannst du belegen?

C
Übersetze diesen Sachverhalt in eine Formel für die Oberfläche einer Kugel.

D
Kontrolliere deine Formel mit Hilfe des Internets!



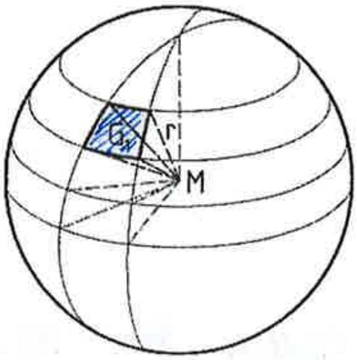
D: $\text{Oberfläche}_{\text{Kreis}} = 4\pi r^2$

Kugelrund

AB 2

Kugelvolumen

Die kleinen glatten Spiegel auf der Kugeloberfläche sind Grundflächen von Pyramiden mit der Spitze im Mittelpunkt der Kugel.



Man denke sich die Oberfläche der Kugel wieder in kleine, fast ebene Teilflächen zerlegt wie bei der „Disco-Kugel". Diese Teilflächen können als Grundflächen von Pyramiden mit der Spitze im Mittelpunkt der Kugel betrachtet werden. Auch diese Überlegung führt zu einer erstaunlich einfachen Formel für das Kugelvolumen.

Denke dir die ganze Kugeloberfläche mit **Plättchen** der Teilflächen A_1, A_2, A_3, ... A_n bedeckt. Jede Teilfläche ist Grundfläche einer **Pyramide** mit Spitze im **Mittelpunkt der Kugel.**

Für das Gesamtvolumen V des Pyramidenkörpers gilt:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \ldots + V_n$$
$$= \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot A_3 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot A_4 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot r$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (\underbrace{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}) \cdot r$$

Je kleiner die Teilflächen gewählt werden, desto mehr nähert sich das Volumen dem wirklichen Volumen der Kugel.

Also gilt:

$$V_{Kugel} \approx \frac{1}{3} \cdot (\text{Kugeloberfläche}) \cdot r$$
$$\approx \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r$$
$$\approx \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

Merke: Kugeloberfläche $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Kugelvolumen $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

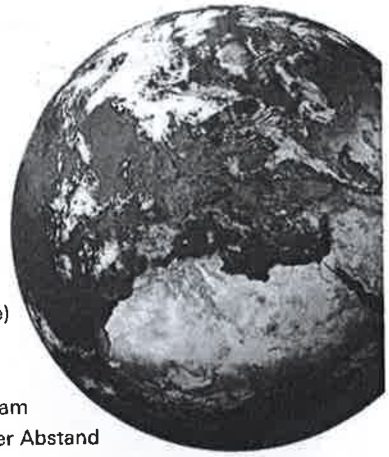
Schulbuch Auftrag SB 3
Erdumfang nach

Heute lässt sich nicht mehr genau rekonstruieren, welche Länge einem Stadion entsprach. Annahmen schwanken zwischen 160 und 185 Metern.

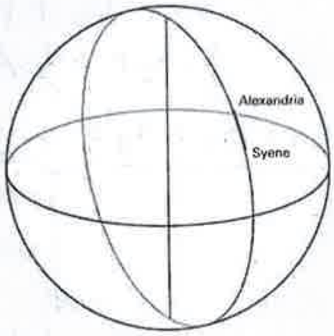
A
Studiere die Überlegungen von Eratosthenes und erkläre deinen Eltern, weshalb der Erdumfang so mit 50•5'000 Stadien berechnet werden kann.

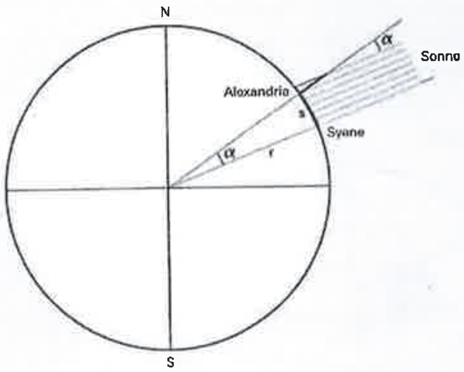
B
Berechne mit diesen Angaben den Erdumfang (mindestens und höchstens und Mittelwert).

C
Berechne damit die Oberfläche und das Volumen der Erde (ebenfalls mindestens, höchstens und Mittelwert).



Dem griechischen Naturphilosophen und Mathematiker Eratosthenes (etwa 275–215 v. Chr.) wurde berichtet, dass sich zur Sommersonnenwende in Syene, einer Stadt in Ägypten, die Sonne mittags in einem tiefen Brunnen spiegle. Das war möglich, weil die Sonne zu diesem Zeitpunkt genau im Zenit stand. In seiner Heimatstadt Alexandria (auf dem gleichen Meridian nördlich von Syene) warf ein Obelisk zur selben Zeit einen kurzen Schatten. Eratosthenes konnte damit den Winkel α zwischen dem Sonnenstrahl und der Achse des Obelisken ermitteln. Er kam auf den fünfzigsten Teil eines Vollwinkels ($\frac{1}{50}$ von 360°). Der Abstand der beiden Orte war schon damals bekannt, nämlich 5 000 Stadien. Also musste der Erdumfang $50 \cdot 5\,000$ Stadien betragen.





(A) = Hausaufgabe

B

(B) Man nimmt an, dass ein Stadion 160 – 185 m beträgt!

Mindestens : $50 \cdot 5'000 \cdot 160\,m = 40'000'000\,m$
$= 40'000\,km$

Maximal : $50 \cdot 5'000 \cdot 185\,m = 46'250'000\,m$
$= 46'250\,km$

→ Ø = 43'125 km

(C)

Erde	Oberfläche $4\pi r^2$	Volumen $4/3\,\pi r^3$	
mind.	509'295'818 km^2	$1.08 \cdot 10^{12}\,km^3$	$r = 40'000\,km : \pi : 2$
höchstens	680'884'741 km^2	$1.67 \cdot 10^{12}\,km^3$	$r = 46'250\,km : \pi : 2$
Mittelwert			

Schulbuch Auftrag SB 4
Mond

Der Mond hat einen mittleren Durchmesser von 3'476 km. Berechne seine Oberfläche und sein Volumen. Vergleiche mit der Erde.

Grössenvergleich Erde Mond (Quelle: Wikipedia)

Erd-Durchmesser aus dem Internet entnehmen!

$d_{Erde} \approx 2 \cdot 6371.0 \text{ km}$

$r = d : 2 = 3476 \text{ km} : 2 = 1738 \text{ km}$

$\text{Oberfläche}_{Mond} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (1738 \text{ km})^2$
$= \underline{\underline{37'958'532 \text{ km}^2}}$

$\text{Volumen}_{Mond} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1738 \text{ km})^3$
$= \underline{\underline{2.199 \cdot 10^{10} \text{ km}^3}}$

$\text{Oberfläche}_{Erde} = \underline{\underline{510'064'472 \text{ km}^2}}$ $\quad \approx \underline{\underline{\cdot 13.4}}$

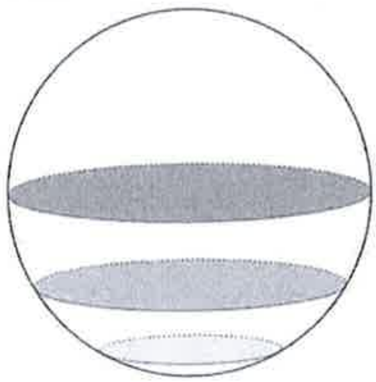
$\text{Volumen}_{Erde} = \underline{\underline{1.083 \cdot 10^{12} \text{ km}^3}}$ $\quad \approx \underline{\underline{\cdot 49.3}}$

Die Erde hat gegenüber dem Mond eine rund 13-Mal grössere Oberfläche und ein um fast das 50-fache grösseres Volumen!

Auftrag 1
Kugelrunde Gegenstände
Berechne das Volumen und die Oberfläche der folgenden Körper.
Notiere zu den Resultaten gleich grosse Gegenstände aus deinem Lebensraum wie im Beispiel gezeigt.
Mit Lösungsweg!

Körper	Oberfläche $4 \cdot \pi \cdot r^2$	Volumen $4/3 \cdot \pi \cdot r^3$
Erbse mit 5mm Durchmesser $r = 2.5mm$	$78.5\ mm^2$	$65.4\ mm^3$
	Etwa fingernagelgross	
Tennisball mit 3 cm Radius	$113.1\ cm^2$	$113.1\ cm^3$
	1 WC Papierblatt	kleines Trinkglas
Tischtennisball mit 12 cm Umfang $r = u : 2\pi$ $= 1.91\ cm$	$45.8\ cm^2$	$29.2\ cm^3$
	halbe Handfläche	
Fussball mit 70 cm Umfang $r = u : 2\pi$ $r = 11.1\ cm$	$1559.7\ cm^2$	$5792.2\ cm^3$
	3 · A4-Seiten	

Auftrag 2
Schnittflächen



Beschreibe in ganzen Sätzen, wo die Schnittfläche durch eine Kugel am kleinsten und wo sie am grössten ist.

Die Schnittfläche ist am grössten, wenn man durch den Mittelpunkt der Kugel schneidet. Je näher man am Rand der Kugel schneidet, desto kleiner wird der Kreis!

Auftrag 3
Die grösste Schnittfläche einer Kugel ist gegeben (z.B. $100m^2$). Beschreibe mit Formeln, wie du damit den Radius, die Oberfläche und das Volumen der Kugel berechnen kannst.

$$A_0 = 100m^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{A_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{100}{\pi}}\ m \approx \underline{5.64\ m}$$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot \frac{100}{\pi} = \underline{400\ m^2}$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{100}{\pi}}^3 = \underline{752.25\ m^3}$$

Kugelrund

AB 6

Schulbuch Auftrag 4
Berechne die fehlenden Angaben zu den verschiedenen Kugeln.

$r^2 \cdot \pi$ $\qquad \cdot 4$ $\qquad 4\pi r^2$ $\qquad 4/3\,\pi r^3$

Durchmesser in cm	Radius in cm	Grösstmögliche Schnittfläche in cm^2	Oberfläche in cm^2	Volumen in cm^3
10	5	$25\pi \approx 78.5$	$100\pi \approx 314.2$	523.6
20	10	$100\pi \approx 314.2$	$400\pi \approx 1256.6$	4188.8
100	50	$2500\pi \approx 7853.98$	$10'000\pi \approx 31415.9$	523'598.8
200	100	$10'000\pi \approx 31415.9$	$40'000\pi \approx 125'663.7$	4'188'790.2
11.28	5.64 *	100	400	752.25
22.57	11.28 *	400	1600	6018.0
45.14	22.57 *	1600	6400	48'144.2
12.4	6.2 **	120.9	483.6 *	1000
24.8	12.4 **	483.6	1934.4	8000
6.2	3.1 **	30.2	120.9	125

* $r = \sqrt{\frac{A_O}{\pi}}$

** $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

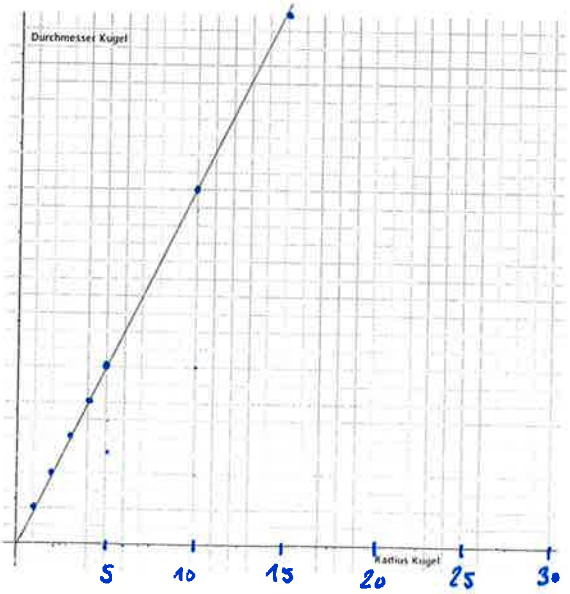
$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot V : \pi}$

$= \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4\pi}}$

Schulbuch Auftrag 5
Erstelle Wertetabellen und stelle die Abhängigkeiten als Graph dar.

Kugel r	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30
Kugel d	2	4	6	8	10	20	30	40	50	60

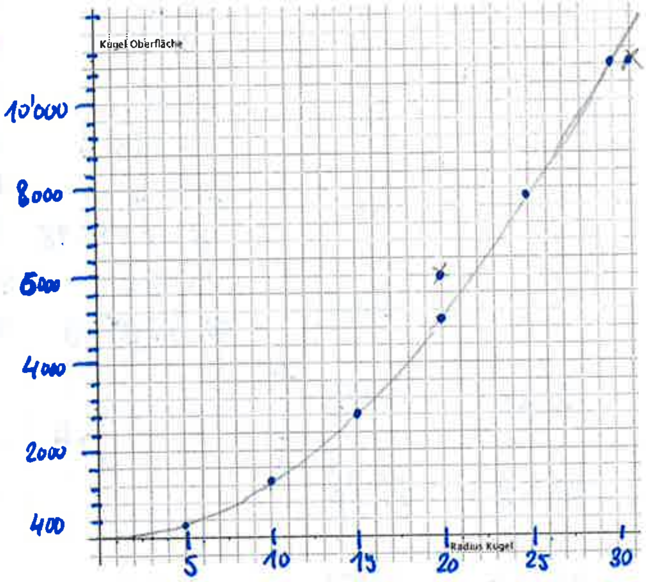
$d = 2 \cdot r$



$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

auf 1 Komma-Stelle gerundet

Kugel r	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30
Kugel-oberfläche O	12.6	50.3	113.1	201.1	314.2	1257	~~4590~~ 2827	5027	7853	11'309.7



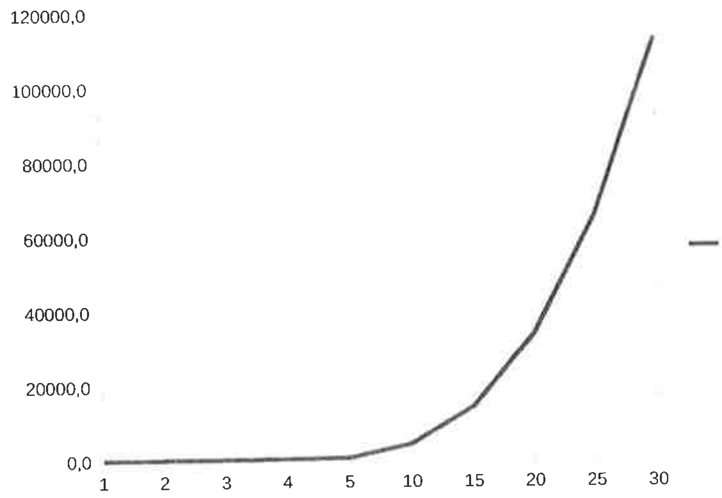
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Auch mit Computer möglich!

Kugel r	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30
Kugel-volumen V	4.2	33.5	113.1	268.1	523.6	4189	14'137	33'510	65'450	113'097

Tabelle1

Kugel r	1	2	3	4	5	10	15	20	25
Volumen V	4.2	33,5	113,1	268,1	523,6	4189	14137	33510	65450



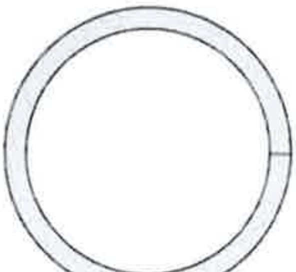
Auftrag 6
Gegeben sind kleine Bleikugeln mit 1 mm Radius.
a) Wie viele dieser Kugeln braucht man, um daraus eine Bleikugel mit 2 mm Radius durch schmelzen und neu giessen herzustellen?
b) Wie viele kleine Kugeln mit 1 mm Radius braucht man, um eine Kugel mit der hundertfachen Oberflächen einer 1mm Kugel herzustellen?
c) Man giesst aus 1000 kleinen Kugeln mit 1mm Radius eine einzige grosse Kugel. Wie gross ist der Radius? Wie gross ist die Oberfläche? Wie viel mal grösser sind Radius und Oberfläche der grossen Kugel zu einer kleinen?

a) $V_{Kugel\ r=1mm} = 4/3 \cdot \pi \cdot \overset{=1}{1^3}$
$V_{Kugel\ r=2mm} = 4/3 \cdot \pi \cdot \overset{=8}{2^3}$
Wenn man den Radius r verdoppelt, wird das Volumen 8x grösser!
Man braucht 8 kleine Kugeln!

b) $\text{Oberfläche}_{Kugel\ r=1mm} = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 12{,}57 mm^2$
$\text{Oberfläche}_{100\times} = 100 \cdot 12.57\ldots = 1256.6 mm^2$, daraus jetzt r berechnen: $r = \sqrt[2]{\text{Oberfläche} : 4\pi}$
$= \sqrt[2]{1256.6 : 4\pi} \approx 10 mm$
Der neue Radius r ist 10 Mal grösser, man müsste also $10^3 = 1000$ kleine Kugeln einschmelzen!

c) aus b) folgt, dass aus 1000 Kugeln mit $r = 1mm$ eine Kugel entsteht, die $\sqrt[3]{1000} = 10$ mm Radius hat und damit die $10^2 = 100$-fache Oberfläche hat!

Auftrag 7
Ist bei einer Kugelschale die Schalendicke sehr viel kleiner als der Radius, so kann man ihr Volumen näherungsweise als „Oberfläche • Schalendicke“ berechnen.
Aus einem Tropfen Seifenlösung von $2mm^3$ Volumen ist eine Seifenblase mit einem Aussendurchmesser von 80 mm geblasen worden. Berechne die Dicke der Seifenschale!



Oberfläche Kugel mit $d = 80$ mm:
$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (40mm)^2 = 20'106.2 mm^2$
Schalendicke = Volumen : Oberfläche
$= 2mm^3 : 20'106.2 mm^2$
$\approx 0.000'099 mm$

Die Schalendicke beträgt ca. 1/10'000 mm!

Auftrag 8
Wie viel wiegt wohl die Erde, wenn man von einer durchschnittlichen Dichte von 5'000 kg/m^3 ausgeht?

$r = 6371\ km$

Es gilt: Dichte = Masse : Volumen

$\Rightarrow$ Masse = Dichte · Volumen

$= 5000\ kg/m^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6'371'000^3\ m^3$

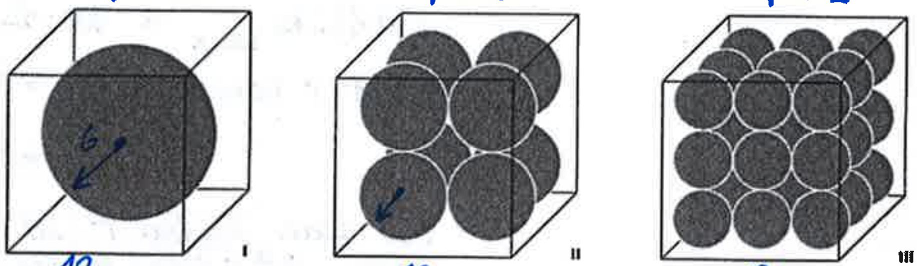
$= 5.416... \cdot 10^{24}\ kg$

$= 5.416 \cdot 10^{21}\ t$

Auftrag 9
In einem Würfel mit der Kantenlänge von 12 cm sind Kugeln verpackt. In jedem Würfel haben alle Kugeln je die gleiche Grösse. Die einzelnen Schichten liegen exakt übereinander.

A
Berechne je den Anteil des Kugelvolumens am Würfelvolumen (= Volumen der Kugeln ÷ Volumen des Würfels = ?%)

r = 6 r = 3 r = 2



I II III

I	II	III
12	12	12
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \cdot 8$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \cdot 27$
$\approx 904.78\ cm^3$	$\approx 904{,}78\ cm^3$	$\approx 904{,}78\ cm^3$
$: 1728$	$: 1728$	$: 1728$
$= 52.4\%$	$= 52.4\%$	$= 52.4\%$

Egal wie gross die Kugeln sind, es werden stets 52.4% des Würfelvolumens ausgefüllt!

B
Für Situation 1 gilt: Sowohl das Volumen als auch das Oberflächenverhältnis zwischen Kugel und Würfel ist etwa 1:2. Berechne das Verhältnis exakt und zeige, dass es den Wert Pi/6 hat.

Volumen Würfel

$= 12^3 = 1728\ cm^3$

Oberfläche Würfel

$= 12^2 \cdot 6 = 864\ cm^2$

$O = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 \qquad = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 8$

$\approx 452.4 \qquad =$

$: 864$

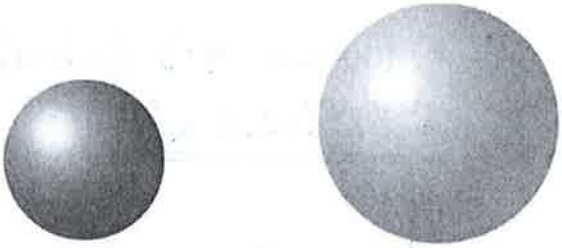
$\approx 52.4\%$

(Allgemein) gilt:

$$\frac{V_O}{V_{\square}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3}{12^3} = \frac{4\ \pi \cdot 6^3}{3 \cdot 12^3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12} =$$

$$\frac{O_O}{O_{\square}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6^2}{12^2 \cdot 6} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6}{12 \cdot 12} = \frac{\pi}{6}$$

Auftrag 10
Behauptungen



Kugel 1 Kugel 2

Kugel 1 ist kleiner als Kugel 2. Kreuze wahr (w) oder falsch (f) an.

A Wenn der Durchmesser von Kugel 2 doppelt so gross ist wie derjenige von Kugel 1, dann ...

ist der Radius von Kugel 2 auch doppelt so gross wie derjenige von Kugel 1.	☒ w	☐ f	
ist die grösste Schnittfläche von Kugel 2 doppelt so gross wie diejenige von Kugel 1.	☐ w	☒ f	4×
ist die Oberfläche von Kugel 2 doppelt so gross wie diejenige von Kugel 1.	☐ w	☒ f	4×
ist das Volumen von Kugel 2 achtmal so gross wie dasjenige von Kugel 1.	☒ w	☐ f	

B Wenn das Kugelvolumen von Kugel 2 27-mal so gross ist wie dasjenige von Kugel 1, dann ...

ist die Oberfläche von Kugel 2 neunmal so gross wie diejenige von Kugel 1.	☒ w	☐ f
ist die grösste Schnittfläche von Kugel 2 dreimal so gross wie diejenige von Kugel 1.	☐ w	☒ f
ist der Durchmesser von Kugel 2 neunmal so gross wie derjenige von Kugel 1.	☐ w	☒ f
ist der Radius von Kugel 2 dreimal so gross wie derjenige von Kugel 1.	☒ w	☐ f

C Wenn die Oberfläche von Kugel 1 einen Hundertstel der Oberfläche von Kugel 2 beträgt, dann ...

ist der Durchmesser von Kugel 2 auch $\frac{1}{100}$ des Durchmessers von Kugel 1.	☐ w	☒ f
ist der Radius von Kugel 1 zehnmal kleiner als derjenige von Kugel 2.	☒ w	☐ f
ist die grösste Schnittfläche von Kugel 1 auch 100-mal kleiner als die grösste Schnittfläche von Kugel 2.	☒ w	☐ f
ist das Volumen von Kugel 1 200-mal kleiner als das Volumen von Kugel 2.	☐ w	☒ f

Aufgabe 11
Ein Fussball hat einen Durchmesser von d=16 cm. Wie viel m_2 Leder benötigt man für 100'000 Bälle. Rechne mit Pi = 3.14.

Aufgabe 12
Die Wettkampfkugel für Männer beim Kugelstossen ist 7.26 kg schwer. Die Dichte beträgt 7.86 kg/dm3. Wie gross ist der Radius der Kugel? Rechne mit Pi = 3.14 und runde auf volle mm.

Auftrag 13
Pietro Kanne-Loni hat noch einen Liter Vanilleeis, dass er mit seinem kugelförmigen Eisportionierer (d= 5cm) in seine Waffeln füllt. Wie viele Eisportionen kann er noch verteilen?
Rechne mit Pi = 3.14 und runde auf ganze Eisportionen.

Auftrag 14
Eine Kugel passt genau in einen Würfel hinein und berührt also die Flächen des Würfels. Wie gross ist der Radius der Kugel und das Volumen des Würfels, wenn das der Kugel 904.32 cm^3 beträgt?
Rechne mit Pi = 3.14.

$O = 100'000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (0.16m)^2$

$= 32'169.9\ m^2$

$V = \text{Masse} : \text{Dichte}$ $\qquad$ $\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$

$= 7.26\ kg : 7.86\ kg/dm^3$

$= 0.924\ dm^3$

$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0.924\ dm^3}{4 \cdot \pi}} \approx 0.60\ dm = 6\ cm$

$\text{Anzahl Vanille-Eis-Kugeln} = \frac{\text{Volumen Eis}}{\text{Volumen einer Kugel}}$

$= \frac{1\ l}{\frac{4}{3} \cdot \pi (2.5\ cm)^3} = \frac{1000\ cm^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \cancel{15.6}\ cm^3\ 2.5^3} = 15\ \text{Kugeln}$

$r_{Kugel} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 904.32}{(4 \cdot 3.14)}} \approx 6\ cm$

Das bedeutet, dass der Würfel eine Kantenlänge von $2 \cdot 6\ cm = 12\ cm$ hat.

$\Rightarrow V_{Würfel} = (12\ cm)^3 = 1728\ cm^3$

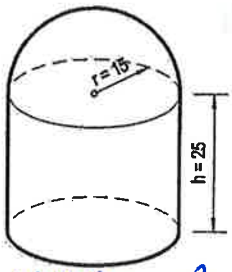
Auftrag 15

Aus Buob 3 – AB 84.1

Erdäquatorlänge ca. 40 000 km,
π aus TR, Genauigkeit: km^2, km^3

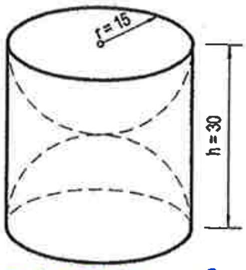
O = 509'295'818 km^2
V = 1'080'759'292'185 km^3

Kreiszylinder mit Halbkugel,
Masse in cm, π aus TR, 1 Stelle



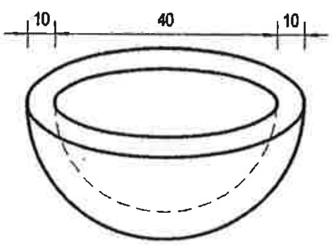
O = 4'476.8 cm^2
V = 24'740.0 cm^3

Halbkugelförmige Einbuchtungen,
Masse in cm, π aus TR, 1 Stelle



O = 5'654.9 cm^2
V = 7'068.6 cm^3

Hohle Halbkugel,
Masse in cm, π aus TR, 1 Stelle



O = 9'738.9 cm^2
V = 39'793.5 cm^3

AB 13 Kugelrund

Zusatzaufgaben

$r = \sqrt[3]{\frac{3\cdot V}{4\cdot\pi}}$

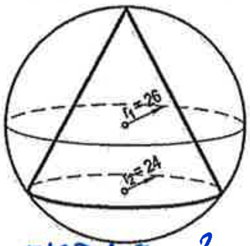
Radius r	Durchmesser d	Volumen V
4.5 m	9.0 m	381.7... m^3

Radius r	Durchmesser d	Volumen V
95 cm	190 cm	3'591'364.0 cm^3

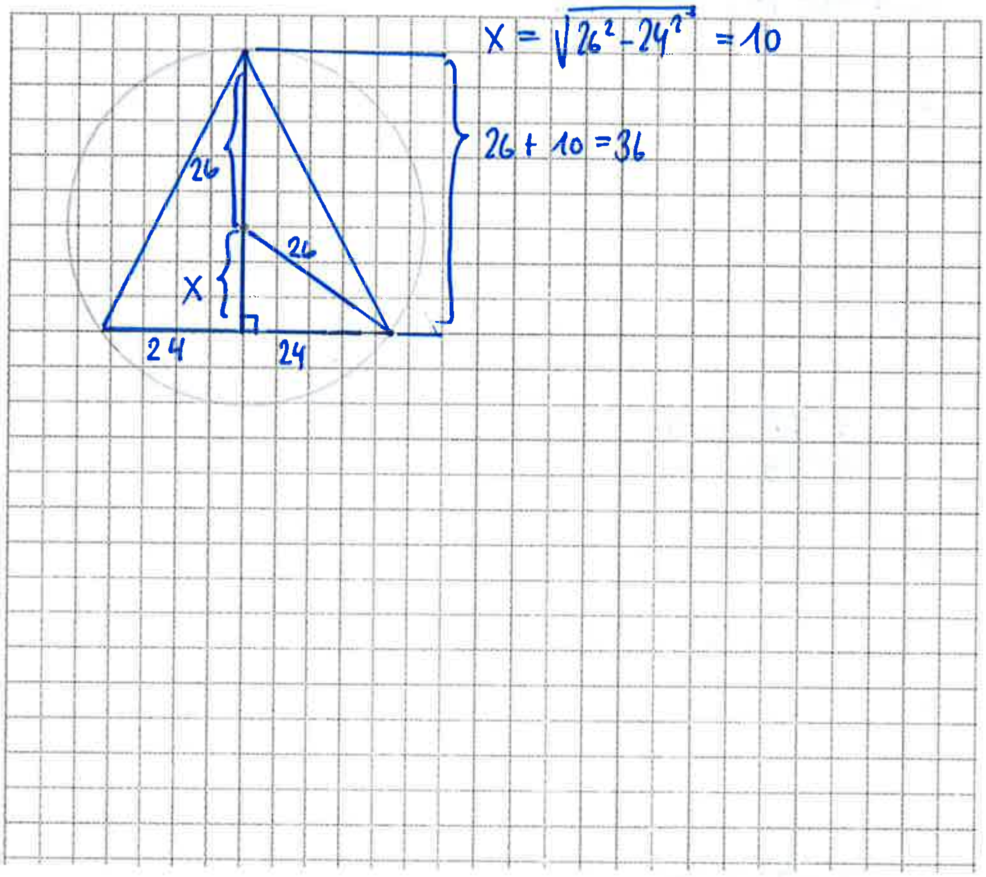
Radius r	Durchmesser d	Volumen V
14 dm	28 dm	11'494.0 dm^3

Für Könner

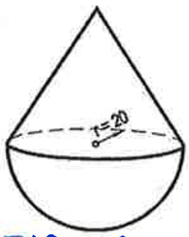
Berechne O und V des in der Kugel einbeschriebenen Kegels.
Masse in mm, π aus TR, 1 Stelle



O = 5'071.8 mm^2
V = 21'714.7 mm^3



Halbkugel und Kegel haben das gleiche Volumen.
Masse in cm, π aus TR, 1 Stelle



O = 5'323.2 cm^2
V = 33'510.3 cm^3

Kugelrund AB 14

Links

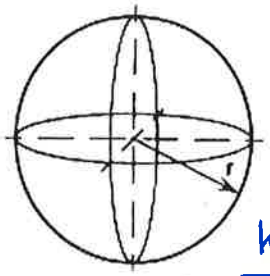
http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/kugelrechner.htm
http://www.walter-fendt.de/m14d/kugelvolumen.htm

Formelsammlung

Kugel

Volumen $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

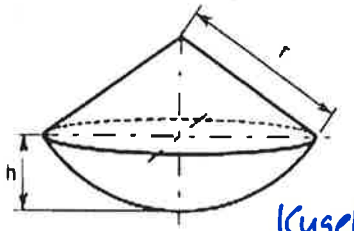
Oberfläche $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



Kugel

Kugelsektor

Volumen $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$



Kugelsektor

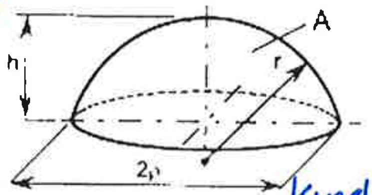
Kugelsegment

Volumen $V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 (3r - h)$

$V = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3\rho^2 + h^2)$

Oberfläche $O = A + \pi \cdot \rho^2$

Kugelhaube $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$



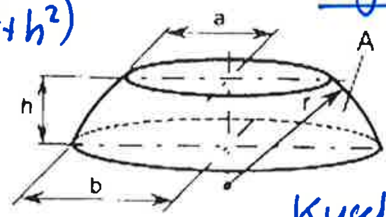
Kugel-Segment

Kugelschicht

Volumen $V = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3a^2 + 3b^2 + h^2)$

Oberfläche $O = A + \pi \cdot (a^2 + b^2)$

Kugelzone $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$



Kugel-Schicht

Klausur Mathe: LU 9.15 Kugel 2012 Nr. ___

Name/Klasse: ________________ Datum: __________ Zeit: ___'Unterschrift

Punkte: 36 ____Note:_______ Persönlicher Notenstand: _______ der Eltern: ______________________

Selbsteinschätzung:

Verständnis vom Thema:	5 4 3 2 1	Lerneinsatz Prüfung	5 4 3 2 1 oder ___min
Allg. Befinden:	5 4 3 2 1	Aufmerksamkeit in Schule	5 4 3 2 1

Bem.: Mit TR. Achte auf übersichtliche Darstellung. Lösungswege müssen klar ersichtlich sein, ansonsten gibt es Punktabzüge! Erlaubt ist eine A4-Seite mit selbstgeschriebenen Formeln.

---

1. Aufgabe **4 P.**

Berechne Volumen und Oberfläche einer Kugel mit Umfang d = 60 mm.

$r = 30\ mm$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 30^3\ mm^3 = \underline{\underline{113'097\ mm^3}}$

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 30^2\ mm^2 = \underline{\underline{11'309{,}7\ mm^2}}$

2. Aufgabe **6 P.**

Ein Halbkugel soll 0.5 Liter Wasser fassen können. Wie viel Blech (in cm^2) braucht man zu seiner Herstellung?

$V_{ganze\ Kugel} = 1\ l = 1000\ cm^3$

$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}$

$= \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1000}{4 \cdot \pi}}$

$= \sqrt[3]{238{,}7}$

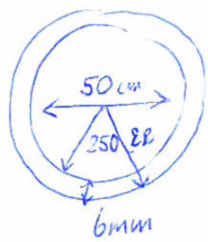
$= 6.20\ cm$ → 3P.

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2 = 2 \cdot \pi \cdot 6.2^2$

$= \underline{\underline{241.8\ cm^2}}$ → 3P.

3. Aufgabe **4 P.**

Eine Kugel von 50 cm Durchmesser wird mit einer 6 mm dicken Gummischicht überzogen. Wie viel cm^3 Gummimasse ist dafür nötig?
Erstelle eine Skizze.



$V_{Gummi} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 256^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 250^3$

$= 4'826'391\ mm^3$

$= \underline{\underline{4'826.4\ cm^3}}$

richtige Idee : 1P.

4. Aufgabe $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ **6 P.**

Berechne Durchmesser, Umfang und Volumen einer Kugel mit einer Oberfläche mit O = 2 m^2.

$r = \sqrt{O : (4\pi)}$

$= \sqrt{2 : (4\pi)} \approx 0.3989\ m$

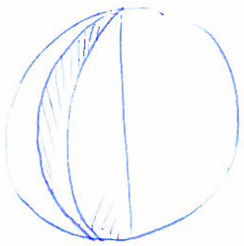
$\underline{\underline{d = 0.798\ m}}$

$\underline{\underline{U = d \cdot \pi = 2.507\ m}}$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \underline{\underline{0.266\ m^3}}$

5. Aufgabe **4 P.**

Eine geschälte Orange von 5 cm Radius besteht aus 12 gleichen Schnitzen. Berechne Volumen und Oberfläche eines Schnitzes.

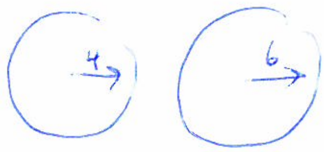


$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 : 12$$
$$= \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 5^3 : 12$$
$$= 43{,}6\ cm^3$$

$$O = 4\cdot\pi\cdot r^2 : 12 + r^2\cdot\pi$$
$$= 4\cdot\pi\cdot 25\ cm^2 : 12 + 25\cdot\pi\ cm^2$$
$$= 104.7\ cm^2$$

6. Aufgabe **4 P.**

Zwei Kugeln aus Blei von 12 cm und 8 cm Durchmesser werden zu einer einzigen Kugel zusammen geschmolzen. Wie gross ist der Durchmesser der neuen Kugel?

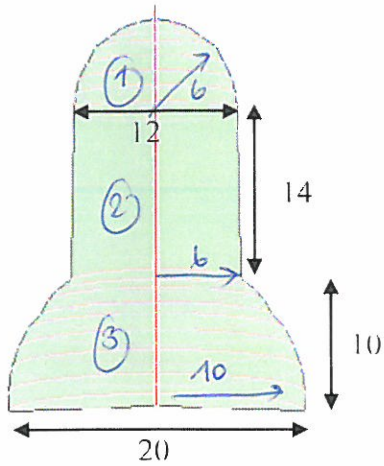


$$\left.V_4 + V_6 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 4^3 + \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 6^3\right\}\ 1$$
$$= 1172.8\ cm^3$$
$$r_{\text{neue Kugel}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 1172.8\ cm^3}{4\cdot\pi}}$$
$$= \sqrt[3]{280} \approx 6.5\ cm$$
$$d = 13.08\ cm$$

7. Aufgabe **8 P.**

Berechne das Volumen und die Oberfläche des folgenden Körpers (Masse in cm), der aus

- einer Halbkugel
- einem Zylinder
- einer Kugelschicht besteht.



$$V_{(1)} = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 6^3 : 2 = 452.4\ cm^3 \quad 1/2$$
$$V_{(2)} = 6^2\cdot\pi\cdot 14 = 1583.4\ cm^3 \quad 1/2$$
$$V_{(3)} = \frac{\pi\cdot 10}{6}\cdot(3\cdot 6^2 + 3\cdot 10^2 + 10^2) = 2659{,}9\ cm^3 \quad 1$$
$$V_{(1)+(2)+(3)} = 4695.6\ cm^3$$

$$O_{(1)} = 4\cdot\pi\cdot r^2 : 2 = 4\cdot\pi\cdot 6^2 : 2 = 226.2\ cm^2 \quad 1/2$$
$$O_{(2)} = 12\cdot\pi\cdot 14 = 527.8\ cm^2 \quad 1/2$$

Boden

$$O_{(3)} = 2\cdot\pi\cdot 10\cdot 10 + 10^2\,\pi = 942.5\ cm^2 \quad 1$$

$$\text{Total} = 1696.46\ cm^2$$

Kugelzone (Kugelschicht)

Volumen:

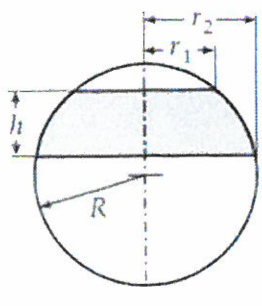
$$V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Oberfläche:

$$A_O = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2).$$
$$= \pi(dh + r_1^2 + r_2^2).$$

Mantelfläche:

$$A_M = 2\pi Rh.$$



Klausur Mathe: LU 9.15 Kugel 2012 Nr. __

Name/Klasse: ________________ Datum: __________ Zeit: ___'Unterschrift

Punkte: ______Note:_______ Persönlicher Notenstand: _______ der Eltern: ________________________

Selbsteinschätzung:

Verständnis vom Thema:	5 4 3 2 1	Lerneinsatz Prüfung	5 4 3 2 1 oder ___min
Allg. Befinden:	5 4 3 2 1	Aufmerksamkeit in Schule	5 4 3 2 1

Bem.: Mit TR. Achte auf übersichtliche Darstellung. Lösungswege müssen klar ersichtlich sein, ansonsten gibt es Punktabzüge!

1. Aufgabe **4 P.**

Berechne Volumen und Oberfläche einer Kugel mit Umfang d = 60 mm.

2. Aufgabe **6 P.**

Ein Halbkugel soll 0.5 Liter Wasser fassen können. Wie viel Blech (in cm^2) braucht man zu seiner Herstellung?

3. Aufgabe **4 P.**

Eine Kugel von 50 cm Durchmesser wird mit einer 6 mm dicken Gummischicht überzogen. Wie viel cm^3 Gummimasse ist dafür nötig?
Erstelle eine Skizze.

4. Aufgabe **6 P.**

Berechne Durchmesser, Umfang und Volumen einer Kugel mit einer Oberfläche mit O = 2 m^2.

5. Aufgabe **4 P.**

Eine geschälte Orange von 5 cm Radius besteht aus 12 gleichen Schnitzen. Berechne Volumen und Oberfläche eines Schnitzes.

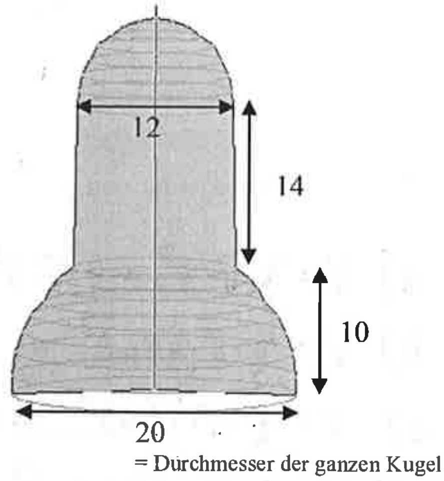
6. Aufgabe **4 P.**

Zwei Kugeln aus Blei von 12 cm und 8 cm Durchmesser werden zu einer einzigen Kugel zusammen geschmolzen. Wie gross ist der Durchmesser der neuen Kugel?

7. Aufgabe **8 P.**

Berechne das Volumen und die Oberfläche des folgenden Körpers (Masse in cm), der aus

- einer Halbkugel
- einem Zylinder
- einer Kugelschicht besteht.



Kugelzone (Kugelschicht)

Volumen:

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

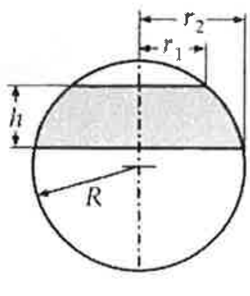
Oberfläche:

$$A_O = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2),$$

$$= \pi(dh + r_1^2 + r_2^2).$$

Mantelfläche:

$$A_L = 2\pi Rh.$$



Name:	
Klasse:	Datum:

Arbeitsblatt Mathematik

Kugeln und komplexe Körper

Teste dich! - Kugeln und komplexe Körper (1/6)

1 Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt einer Kugel

a) mit einem Radius von 3 cm;
b) mit einem Radius von 4,8 cm;
c) mit einem Durchmesser von 2 m;
d) mit einem Durchmesser von 0,8 dm.

a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 113.1\,cm^3$

b) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (4.8\,cm)^3 = 463.2\,cm^3$

c) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1\,m)^3 = 4.19\,m^3$

d) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0.4\,dm)^3 = 0.27\,dm^3$

2 Ermittle die fehlenden Angaben einer Kugel.

	r	d	V	A_O Kugel
a)	4 cm	8 cm	$268.1\,cm^3$	~~50~~ $201.1\,cm^2$
b)	6.5 cm	13 cm	$1150.3\,cm^3$	~~$469\,cm^2$~~
c)	2.9 cm	5.8 cm	$104\,cm^3$	$106.9\,cm^2$
d)	2.6 cm	5.2 cm	$73.7\,cm^3$	$85\,cm^2$

530,9

3 Bestimme das Volumen und den Oberflächeninhalt des Mondes (Mondradius ≈ 3476 km).

$V = 1.76 \cdot 10^{11}\,km^3$ $\quad O = 151'834'128\,km^2$

4 Die Größe von Handbällen gibt man häufig durch ihren Umfang an.
Männerhandball: 59 cm $\longrightarrow$ $r = 59\,cm : \pi : 2 = 9.39\,cm$
Jugendhandball: 54 cm $\longrightarrow$ $r = 54\,cm : \pi : 2 = 8.59\,cm$
Wie viel Leder wird in den jeweiligen Handbällen verarbeitet, wenn man 25 % Verschnitt einrechnen muss?

$O_{Männer} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 1108\,cm^2 \xrightarrow{+25\%} 1385\,cm^2$

$O_{Jugend} = \quad = 928\,cm^2 \xrightarrow{+25\%} 1160\,cm^2$

Name:	
Klasse:	Datum:

Arbeitsblatt Mathematik

Kugeln und komplexe Körper

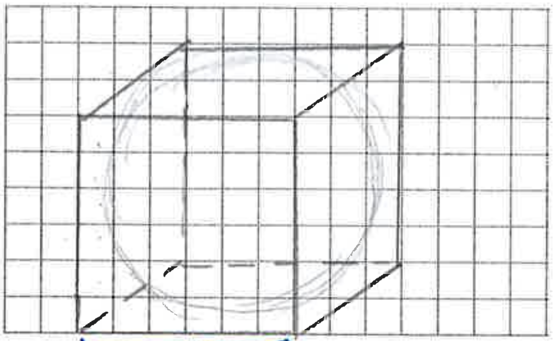
Teste dich! - Kugeln und komplexe Körper (2/6)

5 Eine Kugel wird so in einen Würfel mit einer Kantenlänge von 4,6 cm einbeschrieben, dass sich ihre Seiten berühren.

a) Skizziere ein passendes Schrägbild.

b) Welchen Anteil des Würfelvolumens nimmt die Kugel ein?

c) Vergleiche die Oberflächeninhalte der beiden Körper.



4.6cm

$V_{Würfel} = (4.6\,cm)^3 = 97.34\,cm^3$

$V_{Kugel} = \frac{4\pi}{3} \cdot (2.3\,cm)^3 = 50.96\,cm^3$

$O_{Würfel} = (4.6)^2 \cdot 6 = 126.96$

$O_{Kugel} = 4 \cdot (2.3)^2 \cdot \pi = 66.48$

$V_{Kugel} : V_{Würfel} = \underline{\underline{52.4\%}}$

$O_{Kugel} : O_{Würfel} = \underline{\underline{52.4\%}}$

6 Überprüfe an einem Zahlenbeispiel folgende Aussagen.

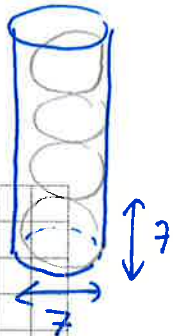
a) Von allen Körpern mit gleichem Volumen hat die Kugel den kleinsten Oberflächeninhalt.

b) Von allen Körpern mit dem gleichen Oberflächeninhalt hat die Kugel das größte Volumen.

7 In eine zylindrische Blechdose passen genau vier Tennisbälle hintereinander. Jeder Ball hat einen Durchmesser von 7 cm.

a) Wie groß ist der in der Dose verbleibende Hohlraum?

b) Wie viel Prozent des Volumens ist leer?



$V_{Zylinder} = 7^2 \cdot \pi \cdot 28$

$V_{Kugel} = (3.5)^3 \cdot 4 \cdot \pi : 3$

Hohlraum $= 7^2 \cdot \pi \cdot 28 - 4 \cdot (3.5)^3 \cdot 4 \cdot \pi : 3$

$= \underline{\underline{3708.1\,cm^3}}$

$\hat{=} \underline{\underline{86\%}}$

Merkblatt