Mathebuch 8

MATHEMATIK

Theorie für Schülerinnen und Schüler

Name und Klasse

____

Inhaltsverzeichnis nach Themen

Arithmetik und Algebra

Geometrie

Inhaltsverzeichnis nach Lernumgebungen

Arithmetik und Algebra

Geometrie

Symbole

LU	Lernumgebung
M	Merke (Begriffe, Definitionen, Herleitungen)
R	Regeln und mathematische Sätze
⇨	Beispiele

Grundoperationen mit Bruchzahlen

LU 2

Addition und Subtraktion

Gleichnamige Brüche

⇨ $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}$ $\qquad$ $\frac{4}{17} - \frac{1}{17} = \frac{4-1}{17} = \frac{3}{17}$

Allgemein $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}}$ $\qquad$ $\boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}}$ für $a \geq c$

R *Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert und den Nenner beibehält.*
Es gelten die gleichen Rechengesetze (Vertauschungsgesetz, Zusammenfassungsgesetz usw.) wie beim Rechnen in N_0.

Ungleichnamige Brüche

⇨ $\frac{31}{56} + \frac{17}{14} - \frac{27}{28} = \frac{31}{56} + \frac{68}{56} - \frac{54}{56} = \frac{31+68-54}{56} = \frac{45}{56}$

⇨ $\frac{3m}{4} - \frac{2m}{3} = \frac{3m \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{2m \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{9m}{12} - \frac{8m}{12} = \frac{9m - 8m}{12} = \frac{m}{12}$

R *Um ungleichnamige Brüche addieren oder subtrahieren zu können, muss man sie zuerst gleichnamig machen, d.h. man muss den Hauptnenner (kgV) bestimmen.*

Gemischte Zahlen

M Eine Summe wie «$4 + \frac{1}{5}$» wird abgekürzt als gemischte Zahl «$4\frac{1}{5}$» geschrieben.
Eine gemischte Zahl ist in jedem Fall grösser als 1.
Jede gemischte Zahl kann deshalb auch als Bruch geschrieben werden, dessen Zähler grösser ist als der Nenner.

Umformungsbeispiele

⇨ $4\frac{1}{5} = 4 + \frac{1}{5} = \frac{20}{5} + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$ $\qquad$ $\frac{65}{7} = \frac{63}{7} + \frac{2}{7} = 9 + \frac{2}{7} = 9\frac{2}{7}$

R *Formt man gemischte Zahlen in solcher Weise um, lassen sie sich wie Brüche addieren oder subtrahieren. Man kann sie aber auch addieren oder subtrahieren, wenn man sie in Summanden aufspaltet.*

⇨ $14\frac{5}{6} + 23\frac{17}{30} - 10\frac{1}{5} = \frac{89}{6} + \frac{707}{30} - \frac{51}{5} = \frac{445}{30} + \frac{707}{30} - \frac{306}{30}$

$= \frac{846}{30} = \frac{141}{5} = \mathbf{28\frac{1}{5}}$

Multiplikation

Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl

⇨ $9 \cdot \frac{5}{7} = \frac{9}{1} \cdot \frac{5}{7} = \frac{9 \cdot 5}{7} = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$

Allgemein $\boxed{a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}}$

Man multipliziert eine natürliche Zahl mit einer Bruchzahl, indem man die natürliche Zahl mit dem Zähler der Bruchzahl multipliziert und den Nenner beibehält.

Multiplikation einer Bruchzahl mit einer Bruchzahl

⇨ $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{17} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 17} = \frac{6}{17}$ $\qquad \frac{6a}{5m^2} \cdot \frac{15m}{2a^3} = \frac{6a \cdot 15m}{5m^2 \cdot 2a^3} = \frac{9}{a^2m}$

Allgemein $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$

Man multipliziert zwei Bruchzahlen miteinander, indem man die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert.
*Wenn möglich soll vor dem Multiplizieren **gekürzt** werden!*

Multiplikation mit Faktoren, die gemischte Zahlen sind

In solchen Fällen werden die gemischten Zahlen in *unechte Brüche* umgeformt und dann wird weitergerechnet, wie es oben gezeigt wurde.

⇨ $8 \cdot 56\frac{3}{4} = \frac{8}{1} \cdot \frac{227}{4} = \frac{8 \cdot 227}{4} = 454$

$12\frac{5}{6} \cdot 34\frac{6}{11} = \frac{77 \cdot 380}{6 \cdot 11} = 443\frac{1}{3}$

Die Verknüpfung «von»

⇨ $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{7} = 3 \cdot (\frac{5}{7} : 4) = \frac{3}{1} \cdot (\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$

Allgemein $\boxed{\frac{a}{b} \text{ von } \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$

Die Verknüpfung «von» ist gleichbedeutend mit der Verknüpfung « · » !

Division

Begriffe

Für natürliche Zahlen, wobei a ein Vielfaches von b und $b \neq 0$ ist, wurde die Division wie folgt erklärt:

$$a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a$$

In entsprechender Weise legen wir jetzt die Division zweier Bruchzahlen fest:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{e}{f} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad \text{(Umkehrverknüpfung)}$$

Quotienten-bestimmung

$$\frac{3}{7} : \frac{5}{11} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{e}{f} \cdot \frac{5}{11} = \frac{3}{7} \quad \text{(nach Def.)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5e}{11f} = \frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot (5e) = 3 \cdot (11f)$$

$$\Leftrightarrow (7 \cdot 5)\, e = (3 \cdot 11)\, f$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{f} = \frac{3 \cdot 11}{7 \cdot 5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{f} = \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{5}$$

Man findet das Resultat $\frac{e}{f}$, indem man $\frac{3}{7}$ statt durch $\frac{5}{11}$ dividiert, mit $\frac{11}{5}$ multipliziert, d.h.: $\frac{3}{7} : \frac{5}{11} = \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{5} = \frac{3 \cdot 11}{7 \cdot 5} = \frac{33}{35}$

Allgemein gilt: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ (a, b, c, d $\in$ N !)

Kehrwert

Beim Betrachten der beiden Brüche $\frac{5}{11}$ und $\frac{11}{5}$ fällt auf, dass der eine aus dem anderen gebildet werden kann, indem man Zähler und Nenner vertauscht oder bildlich gesprochen, indem man den einen Bruch «*umkehrt*».

Vertauscht man bei einem Bruch den Zähler mit dem Nenner, so erhält man seinen ***Kehrwert***.

Divisionsregel

Unter Verwendung des Begriffs «Kehrwert» lässt sich somit die Verallgemeinerung als handfeste Regel formulieren:

Man dividiert durch eine Bruchzahl, indem man mit ihrem Kehrwert multipliziert!

$$\frac{42}{65} : \frac{35}{13} = \frac{42}{65} \cdot \frac{13}{35} = \frac{42 \cdot 13}{65 \cdot 35} = \frac{6}{25}$$

$$\frac{3a}{4b} : \frac{3b}{4a} = \frac{3a}{4b} \cdot \frac{4a}{3b} = \frac{3a \cdot 4a}{4b \cdot 3b} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Grundoperationen mit ganzen Zahlen

LU 3, 21

Addition und Subtraktion

Gewinnung der negativen Zahlen

Die Gleichung 5 + x = 3 ist in N_0 unlösbar, weil es keine natürliche Zahl gibt, welche die Gleichung 5 + x = 3 zu einer wahren Aussage machen kann.
Um diese Einschränkung aufzuheben, erweitert man den Zahlenstrahl nach links über den Nullpunkt hinaus und erhält die Zahlengerade.
Zur Unterscheidung zu den natürlichen Zahlen versieht man die neuen Zahlen immer mit einem – Zeichen und nennt sie negative Zahlen.

Zahlengerade

$$\longleftarrow\!\!\longrightarrow$$

–4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4

negative Zahlen *positive Zahlen*

Addition und Subtraktion

Fürs Addieren und Subtrahieren ergeben sich je die folgenden Fälle.

Addition

$(+4) + (+3) = +(4 + 3) = +7 = 7$
$(-4) + (-3) = -(4 + 3) = -7$
$(+4) + (-3) = +(4 - 3) = +1 = 1$
$(-4) + (+3) = -(4 - 3) = -1$

Subtraktion

$(+4) - (+3) = +(4 - 3) = +1 = 1$
$(+3) - (+4) = -(4 - 3) = -1$
$(-4) - (-3) = -(4 - 3) = -1$
$(-3) - (-4) = +(4 - 3) = +1 = 1$
$(+4) - (-3) = +(4 + 3) = +7 = 7$
$(-4) - (+3) = -(4 + 3) = -7$

Regeln

1. *Sind Vorzeichen und Rechenzeichen gleich, so werden die Beträge der Zahlen addiert.*
2. *Sind Vorzeichen und Rechenzeichen verschieden, so werden die Beträge der Zahlen subtrahiert und das Vorzeichen des grösseren Betrags wird übernommen.*

$(+2x) + (+3x) = 2x + 3x = 5x$
$(-3a) + (-4a) = -3a - 4a = -7a$
$(+5a) + (-6a) = 5a - 6a = -a$
$(-7b) + (+5b) = -7b + 5b = -2b$
$(+4a) - (+5a) = 4a - 5a = -a$
$(-18c) - (-4c) = -18c + 4c = -14c$
$(+3x) - (-9x) = 3x + 9x = 12x$
$(+16y) - (-7y) = 16y + 7y = 23y$

Multiplikation

Eine Zahl $a \in Z$ mit -1 multiplizieren bedeutet, sie am Nullpunkt einer Zahlengeraden spiegeln.

Allgemein

$$\boxed{\begin{aligned} a \cdot (-1) &= -a \\ (-a) \cdot (-1) &= a \end{aligned}}$$

Vorzeichenregeln

Wir unterscheiden vier Fälle.

1 $(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = +(a \cdot b) = +(ab) = +ab = ab$

Positive Zahlen werden als natürliche Zahlen aufgefasst und wie diese multipliziert.

2 $$\begin{aligned} a \cdot (-b) &= a \cdot (b \cdot (-1)) \\ &= (a \cdot b) \cdot (-1) \\ &= -(ab) \end{aligned}$$

3 $$\begin{aligned} (-a) \cdot b &= (a \cdot (-1)) \cdot b \\ &= a \cdot ((-1) \cdot b) \\ &= a \cdot (b \cdot (-1)) \\ &= (a \cdot b) \cdot (-1) \\ &= -(ab) \end{aligned}$$

4 $$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= (a \cdot (-1)) \cdot (-b) \\ &= ((-1) \cdot a) \cdot (-b) \\ &= (-1) \cdot (a \cdot (-b)) \\ &= (-1) \cdot -(ab) \\ &= -(ab) \cdot (-1) \\ &= +(ab) = +ab = ab \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Das Produkt zweier ganzer Zahlen mit *gleichen Vorzeichen* ist *positiv.*

$$\boxed{\begin{aligned} (+a) \cdot (+b) &= +(ab) = ab \\ (-a) \cdot (-b) &= +(ab) = ab \end{aligned}}$$

Das Produkt zweier ganzer Zahlen mit *verschiedenen Vorzeichen* ist *negativ*.

$$\boxed{\begin{aligned} (+a) \cdot (-b) &= -(ab) \\ (-a) \cdot (+b) &= -(ab) \end{aligned}}$$

Drei und mehr Faktoren

Da sich je zwei negative Faktoren immer zu einem positiven Produkt zusammenfassen lassen und alle solchen Produkte und weitere positive Faktoren wiederum ein einziges positives Produkt ergeben, kommt es nur darauf an, ob die Anzahl der negativen Faktoren gerade oder ungerade ist; auf die positiven kommt es gar nicht an.

⇨ $(-a) \cdot (-b) \cdot (-c)^2 = abc^2 \Rightarrow$ 4 negative Faktoren

$k \cdot (-x)^3 \cdot (-y)^2 = -kx^3y^2 \Rightarrow$ 5 negative Faktoren

$3 \cdot (-a)^2 \cdot (-b)^4 \cdot c^5 = 3a^2b^4c^5 \Rightarrow$ 6 negative Faktoren

Ein Produkt aus beliebig vielen von Null verschiedenen Faktoren ist positiv, wenn die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist; negativ, wenn sie ungerade ist.

Division

Division

Die Division soll weiterhin die Umkehrung der Multiplikation sein.

$$a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a \qquad (a, b, c \in Z;\ b \neq 0)$$

Allgemein $\boxed{\begin{array}{r} a : (-1) = -a \\ (-a) : (-1) = a \end{array}}$

Division von Monomen (eingliedrige Terme)

⇨ $(+8) : (+2) = (+4)$, denn $(+4) \cdot (+2) = (+8)$

$(-8) : (-2) = (+4)$, denn $(+4) \cdot (-2) = (-8)$

$(+8) : (-2) = (-4)$, denn $(-4) \cdot (-2) = (+8)$

$(-8) : (+2) = (-4)$, denn $(-4) \cdot (+2) = (-8)$

Ein Quotient ist positiv, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen haben; negativ, wenn sie ungleiche Vorzeichen haben.

Allgemein $(+a) : (+b) = +(a : b) \qquad (+a) : (-b) = -(a : b)$

$(-a) : (-b) = +(a : b) \qquad (-a) : (+b) = -(a : b)$

Der Betrag des Quotienten ist gleich dem Quotient der Beträge von Dividend und Divisor.

Folgerungen

1. Die Vorzeichen von Dividend und Divisor können vertauscht werden. $(+a) : (-b) = (-a) : (+b) = -(a : b)$
2. Die Division durch –1 bewirkt nur einen Vorzeichenwechsel. $a : (-1) = -a$; $(-a) : (-1) = a$

Division von Polynomen (mehrgliedrige Terme)

Ein Polynom dividiert man durch ein Monom, indem man jedes Glied des Polynoms nach der Vorzeichenregel durch das Monom dividiert und die so gewonnenen Quotienten dann addiert bzw. subtrahiert.

⇨ $(8a - 8b) : 8 = a - b$, denn $(a - b) \cdot 8 = 8a - 8b$

$(25xy - 15x) : (-5x) = -5y + 3$, denn $(-5y + 3) \cdot (-5x) = 25xy - 15x$

$(28ax - 42bx - 14cx) : 7x = 4a - 6b - 2c$, denn $(4a - 6b - 2c) \cdot 7x$
$= 28ax - 42bx - 14cx$

Gleichungen

LU 4

Gleichungs-regeln

Formt man Gleichungen nach folgenden Regeln um, so entstehen äquivalente Gleichungen.

① Die Terme einer Gleichung können nach den bekannten Rechengesetzen umgeformt werden (Termumformungen → TU).

② Auf beiden Seiten einer Gleichung kann man dieselbe natürliche Zahl addieren oder subtrahieren.

③ Auf beiden Seiten einer Gleichung kann man dasselbe Vielfache einer Variablen addieren oder subtrahieren.

④ Beide Seiten einer Gleichung kann man mit derselben natürlichen Zahl multiplizieren oder dividieren.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 3(2x - 3) = 5(x + 2) \\
\Leftrightarrow \quad & 6x - 9 = 5x + 10 \\
\Leftrightarrow \quad & 6x - 9 - 5x = 5x + 10 - 5x \\
\Leftrightarrow \quad & x - 9 = 10 \\
\Leftrightarrow \quad & x - 9 - 9 = 10 + 9 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 19
\end{aligned}
$$

Lösungs-verfahren

Will man für eine komplizierte Gleichung mit einer Variablen die Endgleichung bestimmen, so ist es zweckmässig, die gegebene Gleichung durch Anwendung der vier Gleichungsregeln in eine äquivalente Gleichung von der Form $x = a$ mit $a \in \mathbb{N}_0$ umzuformen. Damit die Darstellung der Gleichungsumformungen übersichtlicher wird, bringen wir sie auf eine einfachere Form.

Vereinfachte Darstellung

1. Das Zeichen $\Leftrightarrow$ wird weggelassen.
2. Werden beide Seiten der Gleichung $T_1 = T_2$ auf dieselbe Weise verändert, so gibt man diese Veränderung rechts von der betreffenden Gleichung in Kurzschreibweise an.
3. Eine Gleichung von der Form $x = a$ mit $a \in \mathbb{N}_0$ nennt man nun **Endgleichung**.

⇨	$9x + 68$	=	$5(x + 24)$	TU	gegebene Gleichung
	$9x + 68$	=	$5x + 120$	$\mid - 5x$	↓
	$4x + 68$	=	120	$\mid - 68$	↓
	$4x$	=	52	$\mid : 4$	↓
	x	=	13		Endgleichung

Zehnerpotenzen

LU 8

Zehnerpotenz

Die Bündelungszahlen lassen sich wesentlich einfacher darstellen, wenn man die Potenz-Schreibweise verwendet.

$$\text{Potenz} \; \boxed{10^5} \qquad 5: \text{Exponent (Hochzahl)}, \quad 10: \text{Basis (Grundzahl)}$$

in Worten: „zehn hoch fünf“ oder „5-te Potenz von 10“

$$\begin{array}{rcllcl}
 & & \vdots & & & \vdots \\
10000 & = & 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 & & = & 10^4 \\
1000 & = & 10 \cdot 10 \cdot 10 & & = & 10^3 \\
100 & = & 10 \cdot 10 & & = & 10^2 \\
10 & = & 10 & & = & 10^1 \\
1 & = & 1 & & = & 10^0 \\
0.1 & = & \frac{1}{10} & & = & 10^{-1} \\
0.01 & = & \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} & & = & 10^{-2} \\
0.001 & = & \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} & & = & 10^{-3}
\end{array}$$

negative Exponenten

usw.

Wissenschaftliche Schreibweise

Der erste Faktor hat genau eine Wertziffer vor dem Komma, der zweite ist eine Zehnerpotenz.

⇨ $587\,000\,000 = 5.87 \cdot 10^8$

$0.01 \cdot 10^{-4} = 1 \cdot 10^{-6}$

$230 \cdot 10^7 = 2.3 \cdot 10^9$

$46.95 \cdot 10^{-6} = 4.695 \cdot 10^{-5}$

Anzeige des Taschenrechners

Taschenrechner können meistens nur zehnstellige Zahlen darstellen.

$18\,000\,000\,000 = 18 \cdot 10^9 = 1.8 \cdot 10^{10}$

$0.000\,000\,000\,27 = 0.000\,27 : 10^7 = 2.7 \cdot 10^{-11}$

Hat eine Zahl aber mehr Stellen, so werden die obigen Rechnungen wie folgt angezeigt:

⇒ 1.8E 10 oder 1.8 10

⇒ 2.7E -11 oder 2.7 -11

Potenzregeln

a) Potenzen mit gleicher Basis

MULTIPLIKATION

⇨ $10^{2} \cdot 10^{4} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^{6} = 10^{2+4}$

$\boldsymbol{x^{a} \cdot x^{b} = x^{a+b}}$

DIVISION

⇨ $10^{6} : 10^{2} = 10^{4}$, denn $10^{4} \cdot 10^{2} = 10^{6}$; $10^{6} : 10^{2} = 10^{4} = 10^{6-2}$

$\boldsymbol{x^{a} : x^{b} = x^{a-b}}$

Satz *Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert bzw. dividiert, indem man die Exponenten addiert bzw. subtrahiert und die Basis beibehält.*

b) Potenzen mit gleichem Exponenten

MULTIPLIKATION

⇨ $10^{2} \cdot 4^{2} = 10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 4 = (10 \cdot 4) \cdot (10 \cdot 4) = (10 \cdot 4)^{2}$

$\boldsymbol{x^{a} \cdot y^{a} = (x \cdot y)^{a}}$

DIVISION

⇨ $10^{3} : 2^{3} = 5^{3}$, denn $5^{3} \cdot 2^{3} = 10^{3}$; $10^{3} : 2^{3} = 5^{3} = (10 : 2)^{3}$

$\boldsymbol{x^{a} : y^{a} = (x : y)^{a}}$

Satz *Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert bzw. dividiert und den Exponenten beibehält.*

Prozentrechnung

LU 10

Zins

Zins ist eine Vergütung für eine während einer gewissen Zeit leihweise zur Verfügung gestellte Geldsumme, die man Kapital nennt.
Der Zins wird im Allgemeinen in Prozenten des Kapitals für eine bestimmte Zeitspanne angegeben; wenn nichts Spezielles gesagt ist, für ein Jahr (Jahreszins).

Prozentrechnung	Grundwert	Prozentwert	Prozentsatz
Zinsrechnung	Kapital k	Zins z	Zinssatz p

⇨ Ein Kapital von 6500 Fr. ist zu einem Zinsatz von 2.5 % angelegt. Welchen Zins bringt es?

in %		Betrag in Fr.
100	→	6500
2.5	→	y

$$y = \frac{2.5 \cdot 6500}{100} = 162.5$$

Das Kapital bringt einen Zins von 162.50 Fr.

⇨ Wie hoch ist der Zinssatz für ein Kapital von 800 Fr., das einen Jahreszins von 18 Fr. einbringt?

in %		Betrag in Fr.
100	→	800
x	→	18

$$x = \frac{100 \cdot 18}{800} = 2.25$$

Der Zinssatz beträgt 2¼ %.

Formeln

1. Weg: Mit Hilfe der Prozentwertformel $w = \frac{g \cdot p}{100}$

Durch Austauschen der Formvariablen gelangt man zur Zinsformel für den Jahreszins.

$$z = \frac{k \cdot p}{100} \qquad k = \frac{100 \cdot z}{p} \qquad p = \frac{100 \cdot z}{k}$$

2. Weg: Proportionalität von Zins und Kapital

$$100 : k = p : z$$

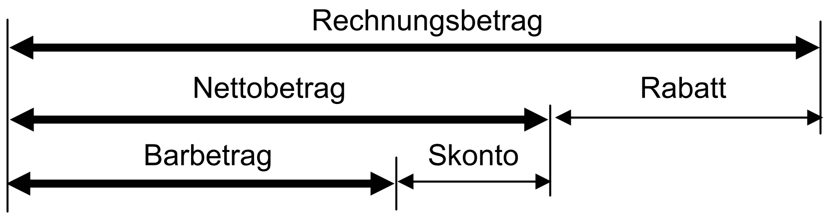
Rabatt

Das ist eine Preisermässigung, die gewährt wird für regelmässige oder grosse Lieferungen oder bei Aktionen, um einen raschen Warenumsatz zu erzielen.

Skonto

Das ist eine Preisermässigung für promte (rasche) Bezahlung.

Werden Rabatt *und* Skonto gewährt, so gilt immer:



Der Rabatt wird immer vom Rechnungsbetrag (100 %), der Skonto immer vom Nettobetrag (100 %) abgezogen.

⇨ Im Ausverkauf wird ein Artikel, der normalerweise 180 Fr. kostet, jetzt mit 15 % Rabatt verkauft.

Verkaufspreis = 85 % von 180 Fr. $= \dfrac{85 \cdot 180\text{ Fr.}}{100} = 153$ Fr.

Gewinn

Selbstkosten	Gewinn
Verkaufspreis	

Verlust

Selbstkosten	
Verkaufspreis	Verlust

Die Selbstkosten sind immer 100 %.

Steuern

Damit ein Staat seinen finanziellen Verpflichtungen nachkommen kann, muss er verschiedene Steuern erheben können.

MWST = **M**ehr**W**ert**ST**euer

Diese gesetzliche Abgabe ist jeweils im Verkaufspreis bereits inbegriffen. Es sind verschiedene Prozentsätze üblich.

⇨

	versch. Gebrauchsgüter	Lebensmittel
Anteil Händler	100 %	100 %
Anteil Staat	7.6 %	2.4 %
Verkaufspreis	107.6 %	102.4 %

Wurzeln

LU 14

Begriffe	Ein Quadrat hat einen Flächeninhalt von A = 144 cm^2. Berechne die Quadratseite s. ⇨ $s = \sqrt{A} = \sqrt{144\,cm^2} = 12\,cm$ M $\sqrt{}$ Wurzelzeichen 144 cm^2 Radikand 12 cm Wurzelwert
Rechnen mit Wurzeln	*Quadratwurzel · Quadratwurzel* ⇨ $\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{9 \cdot 9} = \sqrt{81} = 9$ Allgemein $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ *Quadratwurzel aus einem Produkt* ⇨ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{36} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$ Allgemein $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ R *Die Wurzel aus einem Produkt kann bestimmt werden, indem man die Wurzel aus jedem Faktor bestimmt und die Ergebnisse multipliziert.* *Quadratwurzel aus einem Quotienten* ⇨ $\sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{0.64} = 0.8$ $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0.8$ Allgemein $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ R *Die Wurzel aus einem Quotienten kann bestimmt werden, indem man die Wurzel aus dem Zähler und die Wurzel aus dem Nenner bestimmt und die Ergebnisse dividiert.*

Verteilungsgesetze

LU 22, 29

Aus-multiplizieren

Ein Produkt kann durch Ausmultiplizieren in eine Summe bzw. Differenz umgeformt werden.

Für alle a, b, c $\in$ Z gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} a \cdot (b + c) = ab + ac \\ a \cdot (b - c) = ab - ac \end{array}}$$

⇨ $4 \cdot (a + 3) = 4 \cdot a + 4 \cdot 3 = 4a + 12$

$7 \cdot (x - 19) = 7 \cdot x - 7 \cdot 19 = 7x - 133$

$-8 \cdot (a - 2b) = -8a + 16b$

$(-3t) \cdot (2u + 3v) = -6tu - 9tv$

Verteilungs-gesetz (allgemein)

Besteht nun aber ein Produkt aus zwei algebraischen Summen, so gilt folgende Regel:

“Zwei algebraische Summen werden miteinander multipliziert, indem man unter Beachtung der Vorzeichenregel jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert.”

Es gilt somit allgemein für a, b, c, d $\in$ Z:

1. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
2. $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$
3. $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$
4. $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$

Spezielle Produkte

⇨ Wir betrachten die in der Menge Z allgemeingültige Gleichung:

$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Setze nun in obige Gleichung c = a und d = b !

I. $\mathbf{(a + b) \cdot (a + b)} = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

In gleicher Weise erhält man zwei weitere Gleichungen, wenn die Verknüpfungszeichen in den Klammern verändert werden:

II. $\mathbf{(a - b) \cdot (a - b)} = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $\mathbf{(a + b) \cdot (a - b)} = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Binome

In allen drei Gleichungen treten Produkte aus Summen und Differenzen mit je **zwei Gliedern** auf, die deshalb **B i n o m e** genannt werden.

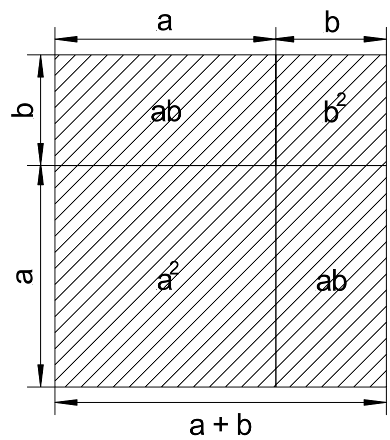
Binomische Formeln

Tritt ein Term mehrfach als Faktor auf, so kann er als Potenz geschrieben werden. Die so entstehenden Gleichungen heissen **B i n o m i s c h e F o r m e l n**.

I.	$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
II.	$(a - b)^2$	=	$a^2 - 2ab + b^2$
III.	$(a + b)(a - b)$	=	$a^2 - b^2$

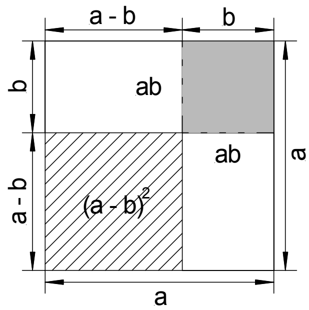
<u>Geometrische Darstellung</u> $(a > 0,\ b > 0$ und $a > b)$

Formel I $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



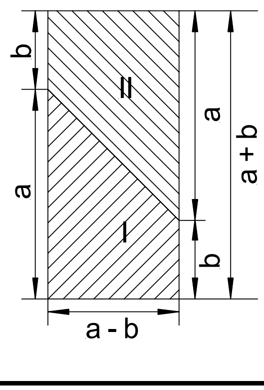
Das grosse Quadrat $(a + b)^2$ wird in zwei kleinere Quadrate a^2 bzw. b^2 und zwei Rechtecke $a \cdot b$ zerlegt.

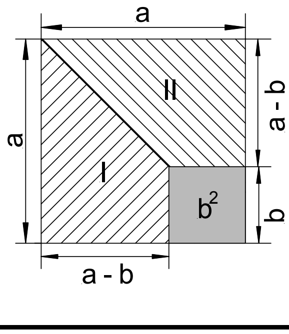
Formel II $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



Von der Grundfläche a^2 wird zweimal das Rechteck $a \cdot b$ subtrahiert. Das einmal zuviel abgezogene Quadrat b^2 muss deshalb wieder addiert werden.

Formel III $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$





Bringt man die Teilflächen A_I und A_{II} des Rechteckes $(a + b)(a - b)$ in die neue Lage, dann fehlt an a^2 gerade das kleine Quadrat b^2.

Verteilungsgesetz

Das Verteilungsgesetz (Distributivgesetz) gibt uns die Möglichkeit ein Produkt in eine Summe bzw. Differenz zu verwandeln.

Produkt	→	Summe	Produkt	→	Differenz
$3\,(a + b)$	=	$3\,a + 3\,b$	$3\,(a - b)$	=	$3\,a - 3\,b$

Aus obigen Gleichheitsbeziehungen folgt aber auch die Umkehrung.

Ausklammern

Summe	→	Produkt	Differenz	→	Produkt
$\mathbf{3}\,a + \mathbf{3}\,b$	=	$\mathbf{3}\,(a + b)$	$\mathbf{3}\,a - \mathbf{3}\,b$	=	$\mathbf{3}\,(a - b)$

Haben alle Summanden einen oder mehrere gemeinsame Faktoren, so kann man diese gemeinsamen Faktoren ***ausklammern****.*
Die Summe oder Differenz wird dadurch in ein Produkt umgewandelt.

$$an + bn - cn = n\,(a + b - c)$$

Wenn nichts anderes verlangt wird, soll der Begriff «Ausklammern» Folgendes beinhalten:
Es sind immer so viele von +1 oder -1 verschiedene Faktoren wie möglich auszuklammern.

Alle Glieder enthalten einen gemeinsamen Faktor

$2ax - bx + 3cx = x\,(2a - b + 3c)$
$dy - d = d\,(y - 1)$
$4a^3b^3 + 2a^4b^2 - 6a^3b^4 = 2a^3b^2\,(2b + a - 3b^2)$
$p\,(x + y) - q\,(x + y) = (x + y)\,(p - q)$
$x\,(a - b) - y\,(b - a) = x\,(a - b) + y\,(a - b) = (a - b)\,(x + y)$

Nicht alle Glieder enthalten einen gemeinsamen Faktor

$ab + 3a + 2b + 6 = a\,(b + 3) + 2\,(b + 3) = (b + 3)\,(a + 2)$
$x - y - x^2 + xy = (x - y) - x\,(x - y) = (x - y)\,(1 - x)$
$1 + 16xy - 4x - 4y = 1 - 4x + 16xy - 4y = (1 - 4x) + 4y\,(4x - 1)$
$= (1 - 4x) - 4y\,(1 - 4x)$
$= (1 - 4x)\,(1 - 4y)$

Anwendung der binomischen Formel

$e^2 + 4ef + 4f^2 = e^2 + 2\,(e \cdot 2f) + (2f)^2 = (e + 2f)^2$
$m^2 - 8m + 16 = m^2 - 2\,(m \cdot 4) + 4^2 = (m - 4)^2$
$64x^2 - 25y^2 = (8x)^2 - (5y)^2 = (8x + 5y)\,(8x - 5y)$
$12a^3p + 12a^2p + 3ap = 3ap\,(4a^2 + 4a + 1) = 3ap\,(2a + 1)^2$

Aufspalten von Trinomen durch Probieren

$x^2 + 11x + 28 = x^2 + (4 + 7)\,x + 4 \cdot 7 = (x + 4)\,(x + 7)$
$x^2 + x - 6 = x^2 + (3 - 2)\,x + 3 \cdot (-2) = (x + 3)\,(x - 2)$
$x^2 - 2x - 24 = x^2 + (-6 + 4)\,x + (-6) \cdot 4 = (x - 6)\,(x + 4)$
$x^2 - 21x + 20 = x^2 + (-1 - 20)\,x + (-1) \cdot (-20) = (x - 1)\,(x - 20)$

Primzahlen

LU 30

Primzahlen

M

Eine natürliche Zahl mit *genau zwei Teilern* heisst Primzahl.

Sieb des Eratosthenes (250 v. Chr.; griechischer Gelehrter)

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Erkennen von Primzahlen

⇨ n = 247

1. 247 hat mindestens die zwei Teiler 1 und 247.
2. 247 : a = b, Rest c

a	2	3	5	7	11	13			
b	123	82	49	35	22	19			
c	1	1	2	2	5	0			

13 und 19 sind weitere Teiler von 247.

3. 247 hat also *mehr als 2 Teiler* und ist daher **keine Primzahl**.

Erkennen von Primzahlen

⇨ $n = 193$

1. 193 hat mindestens die zwei Teiler 1 und 193.
2. $193 : a = b$, Rest c

a	2	3	5	7	11	13	17	19	23	
b	96	64	38	27	17	14	11	10	8	
c	1	1	3	4	6	11	6	3	9	

Tritt bis zur «**Wendestelle**» ($a > b$) der Rest 0 nicht auf, so kann die Untersuchung abgebrochen werden.

3. 193 hat also *genau 2 Teiler* und ist daher **Primzahl**.

Primfaktorzerlegung

Eine beliebige natürliche Zahl soll so in ein Produkt von natürlichen Zahlen zerlegt werden, dass möglichst viele Faktoren entstehen, aber keiner der Faktoren 1 ist!

⇨
$$\begin{aligned} 462 &= 2 \cdot 231 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 77 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 600 &= 2 \cdot 300 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 150 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 75 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 25 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

Eine Produktdarstellung einer natürlichen Zahl, in der alle Faktoren Primzahlen sind, heisst **Primfaktorzerlegung** der gegebenen Zahl.

1. Zu jeder natürlichen Zahl, die grösser als 1 und nicht Primzahl ist, gibt es genau *eine* Primfaktorzerlegung.
2. Zu einer Primzahl gibt es keine Primfaktorzerlegung.
3. Es ist zweckmässig, bei mehrmaligem Vorkommen desselben Primfaktors die Potenzschreibweise zu verwenden.

ggT

Der **ggT** (grösster gemeinsamer Teiler) von natürlichen Zahlen ist das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren der Zerlegungen.

⇨
$$\begin{aligned} 462 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \\ 630 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

$\Rightarrow ggT_{(462,630)} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 60 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 180 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow ggT_{(24,60,180)} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

kgV

Das **kgV** (kleinstes gemeinsames Vielfaches) von natürlichen Zahlen ist das Produkt der höchsten Potenzen aller in den Zerlegungen vorkommenden Primfaktoren.

⇨
$$\begin{aligned} 540 &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \\ 1320 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \end{aligned}$$

$\Rightarrow kgV_{(462,630)} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

$$\begin{aligned} 420 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 56 &= 2^3 \cdot 7 \\ 84 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \end{aligned}$$

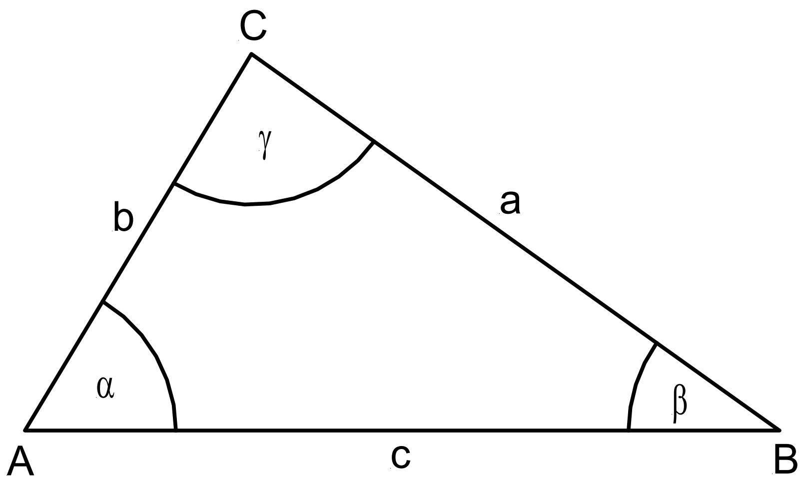
$\Rightarrow kgV_{(24,60,180)} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Dreiecke

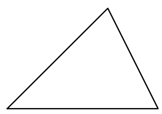
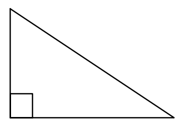
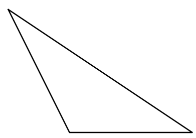
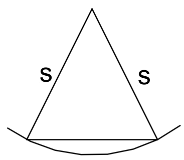
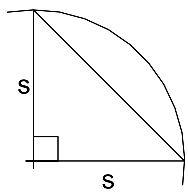
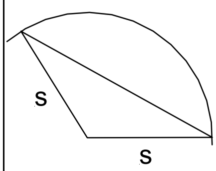
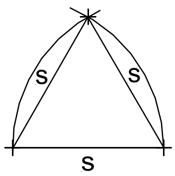
LU 6, 18

Dreiecke

Bezeichnung



Arten

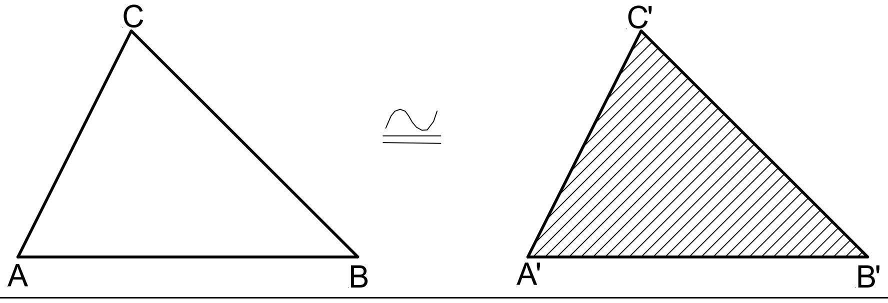
	spitzwinklig	rechtwinklig	stumpfwinklig
ungleichseitig			
gleichschenklig			
gleichseitig			

Kongruenzsätze für Dreiecke

Kongruenz von Dreiecken

Zwei Dreiecke I und II heissen kongruent (deckungsgleich), wenn sie in Form und Grösse übereinstimmen.

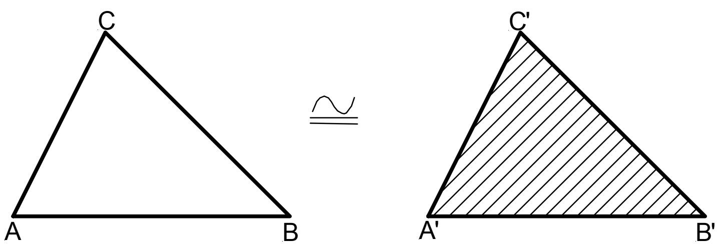
Man schreibt: Dreieck ABC ≅ Dreieck A’B’C’



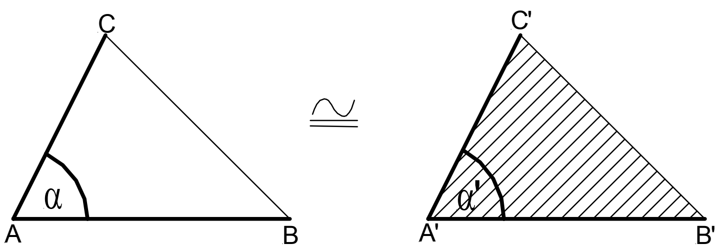
Kongruenzsätze

Zwei Dreiecke heissen kongruent, wenn sie

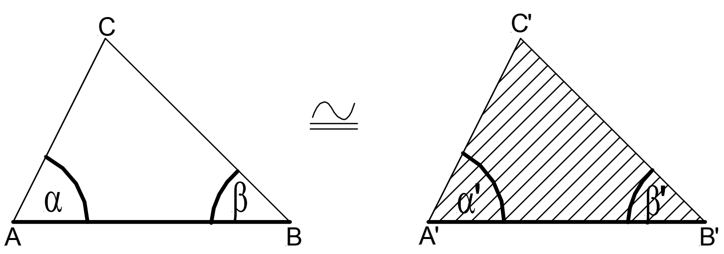
in den Längen aller Seiten (**SSS**) übereinstimmen.



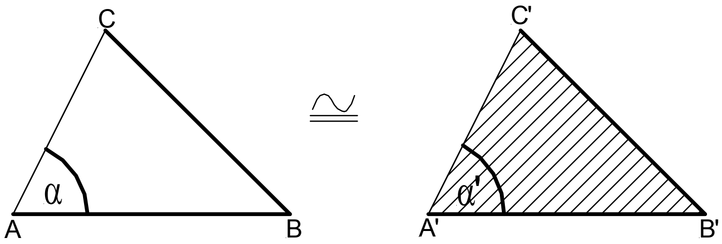
in den Längen zweier Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel (**SWS**) übereinstimmen.



in der Länge einer Seite und den beiden an dieser Seite anliegenden Winkeln (**WSW**) übereinstimmen.



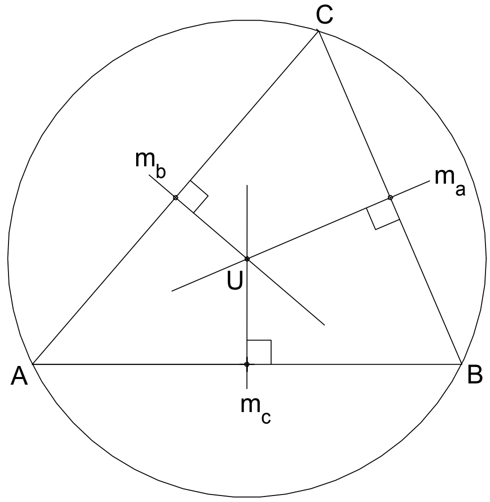
in zwei Seiten und in dem der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel (**SSW**) übereinstimmen.



Spezielle Linien im Dreieck

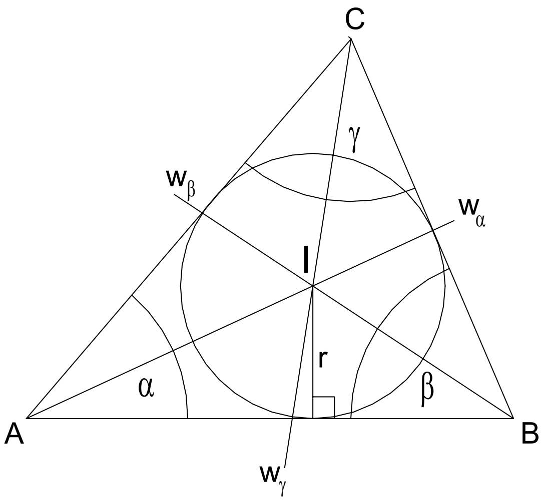
Mittelsenkrechte

Die drei Mittelsenkrechten m_a, m_b und m_c eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt U. Dieser ist der Mittelpunkt des Kreises durch die drei Eckpunkte des Dreiecks, des sogenannten **Umkreises.**



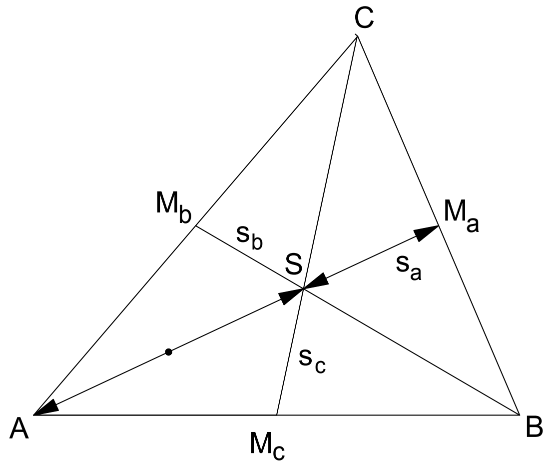
Winkelhalbierende

Die Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt I. Dieser ist der Mittelpunkt des **Inkreises**.



Seiten-halbierende

Die Seitenhalbierenden (Schwerlinien) s_a, s_b und s_c, also die Strecken, die von den Seitenmittelpunkten zu den gegenüberliegenden Eckpunkten gehen, schneiden sich im **Schwerpunkt S**.



$\overline{AS} : \overline{SM_a} = 2 : 1$

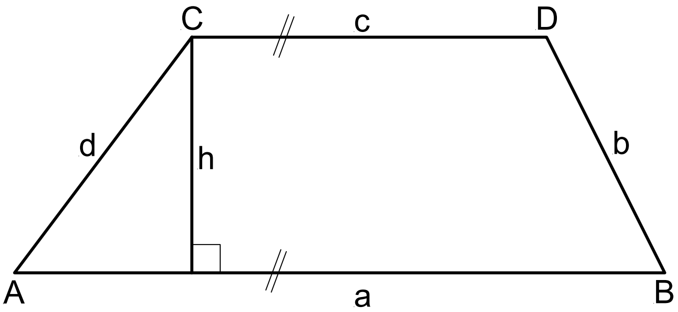
Das Trapez

LU 6

Begriffe

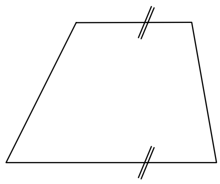
Trapez

Ein Viereck heisst Trapez, wenn es zwei zueinander parallele Seiten besitzt.

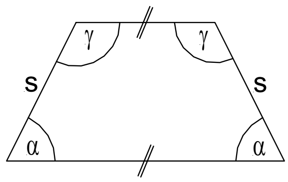


Trapezarten

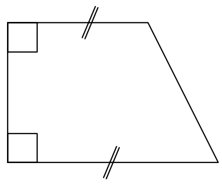
allgemeines Trapez



gleichschenkliges Trapez



rechtwinkliges Trapez

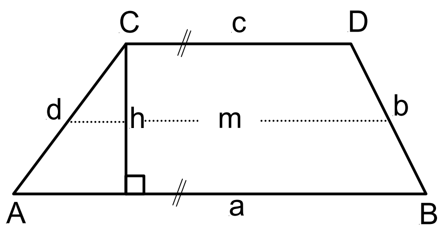


Trapez-konstruktion

Für die Konstruktion eines allgemeinen Trapezes müssen mindestens vier Stücke vorgegeben sein.

Formeln

Trapez-berechnung



$$m = \frac{a+c}{2}$$

Flächeninhalt

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$
$$= m \cdot h$$

Umfang

$$u = a + b + c + d$$

Seite/Höhe

$$c = \frac{2A}{h} - a$$

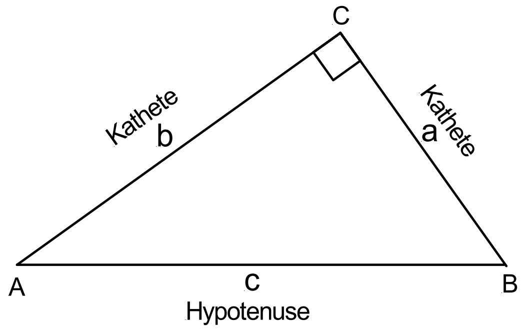
$$a = \frac{2A}{h} - c$$

$$h = \frac{2A}{a+c}$$

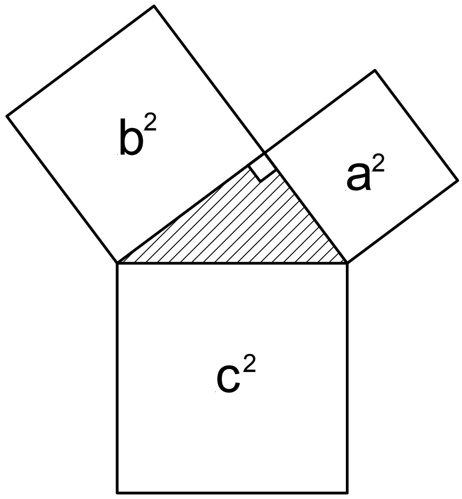
LU 13

Grundbegriffe und Beweis

Das rechtwinklige Dreieck



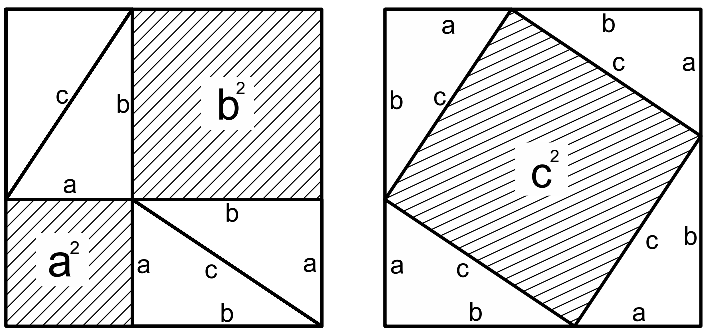
Der Satz des Pythagoras



$$a^2 + b^2 = c^2$$

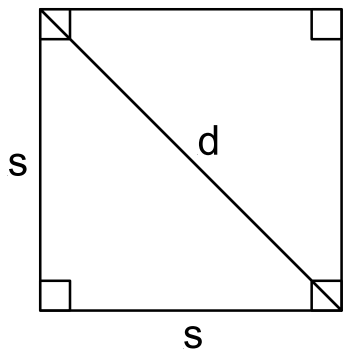
Der Beweis ⇨

Die beide grossen Quadrate haben die gleiche Seitenlänge a + b und damit auch den gleichen Flächeninhalt. Subtrahiert man vom linken Quadrat die vier kongruenten Dreiecke, so bleiben zwei Quadrate a^2 und b^2 übrig. Subtrahiert man vom rechten Quadrat die vier kongruenten Dreiecke, so bleibt das Quadrat c^2 übrig ⇨ $a^2 + b^2 = c^2$.



Formeln, Zahlentripel, Wurzelwerte

Der Satz des Pythagoras im Quadrat

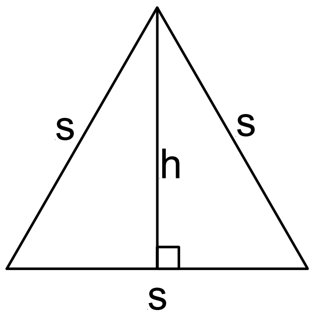


$$d^2 = s^2 + s^2 = 2s^2 \qquad s^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$d = \sqrt{2s^2} = \sqrt{2}s \qquad s = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} = 1.414...$$

Der Satz des Pythagoras im gleichseitigen Dreieck



$$h^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 \qquad s^2 = \frac{4h^2}{3}$$

$$= s^2 - \frac{s^2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}s^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s \qquad s = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

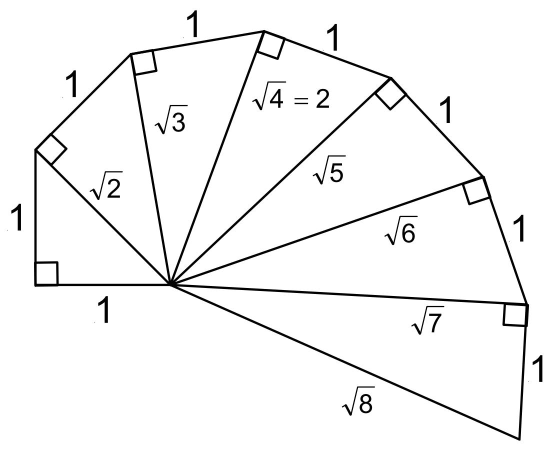
Pythagoräische Zahlentripel

Allgemein heissen ganzzahlige Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ **pythagoräische Zahlentripel**.

c	a	b
5	4	3
13	12	5
17	15	8
25	24	10
29	21	20

c	a	b
37	35	12
41	40	9
53	45	28
61	60	11
65	56	33

Konstruktion von Wurzelwerten

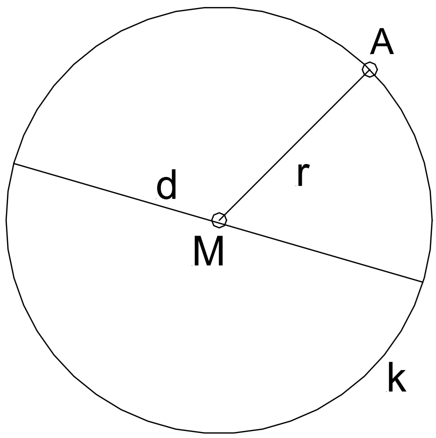


Der Kreis

LU 16, 19

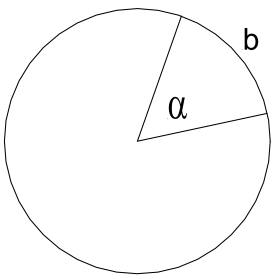
Begriffe

Grundbegriffe

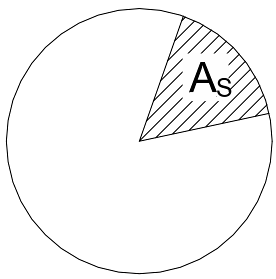


M	Mittelpunkt (Zentrum)
r	Radius ($\overline{MA}$)
k	Kreislinie (Peripherie)
d	Durchmesser

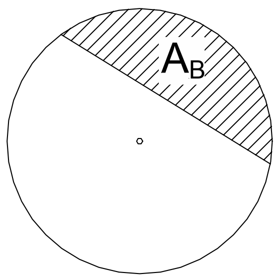
Teile des Kreises



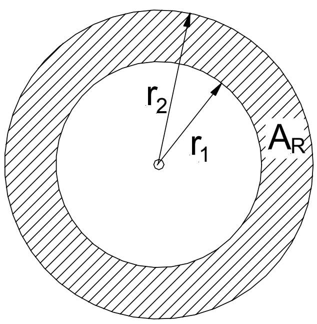
α Zentriwinkel
b Kreisbogen



A_S Kreissektor



A_B Kreissegment



A_R Kreisring

Pi, Formeln

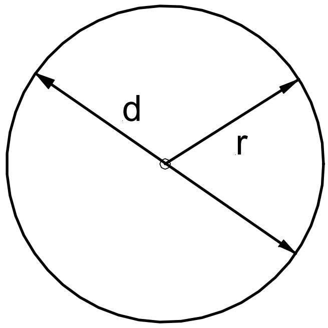
Die Kreiszahl

π

Die Kreiszahl Pi beschreibt das Verhältnis vom Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser. Ihr ungefährer Wert ist 3,14. Als so genannte **irrationale** Zahl hat Pi unendlich viele Stellen hinter dem Komma, die sich nicht zyklisch wiederholen - im Gegensatz zu **rationalen** Zahlen. Rationale Zahlen lassen sich als Bruch darstellen, wie beispielsweise ein Drittel oder 0,375 oder 12,34565656….
Da sich Pi nicht in einen Bruch verwandeln lässt, gehört Pi eben zu den irrationalen Zahlen.

*$\pi =$ 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
58209749445923078164062862089986280348253421170679821480
865132823066470938446095505822317253594081284811174502 …*

Kreis
Umfang
Flächeninhalt



Umfang

$u = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

$d = \dfrac{u}{\pi}$

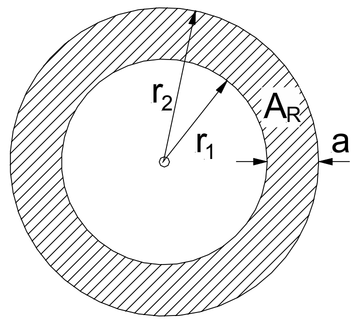
$r = \dfrac{u}{2 \cdot \pi}$

Flächeninhalt

$A = r^2 \cdot \pi$

$r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

Kreisring



Umfang

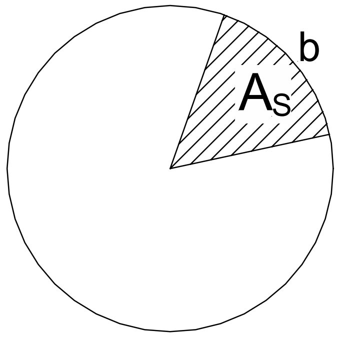
$a = r_2 - r_1$

$u = 2 \cdot \pi \cdot (r_1 + r_2)$

Flächeninhalt

$A_r = \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2)$

Kreissektor



Kreisbogen

$b = \dfrac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180°}$

$r = \dfrac{180° \cdot b}{\pi \cdot \alpha}$

$\alpha = \dfrac{180° \cdot b}{r \cdot \alpha}$

Kreissektor

$A_s = \dfrac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}$

$\alpha = \dfrac{360 \cdot A_S}{r^2 \cdot \pi}$

$r = \sqrt{\dfrac{360° \cdot A_S}{\pi \cdot \alpha}}$

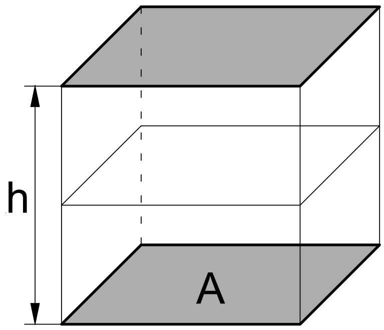
Prismen und Zylinder

23, 24

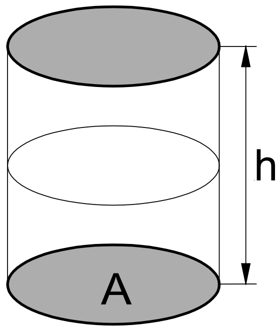
Begriffe

Quader
Zylinder

Verschiebt man die Fläche A eines Rechtecks oder eines Kreises senkrecht (orthogonal) um die Strecke h, so erhält man einen **Quader** oder einen **Zylinder**.



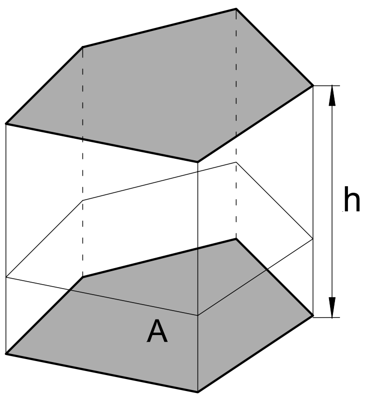
Quader



Zylinder

Prisma

Verschiebt man die Fläche A eines beliebiges Vielecks senkrecht (orthogonal) um die Strecke h, so erhält man ein senkrechtes **Prisma.** **Würfel** und **Quader** sind spezielle Formen des senkrechten Prismas.



Formeln

Prismen
Zylinder

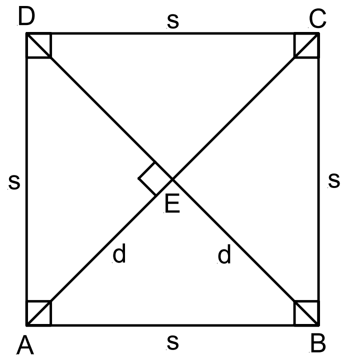
Das Volumen aller Prismen und Zylinder lässt sich mit folgender Formel berechnen:

Volumen = Grundfläche · Höhe

$V = G \cdot h$

Anhang Formelsammlung Parallelogramme

Quadrat



Flächeninhalt

$A = s \cdot s = s^2$

$A = \frac{d \cdot d}{2} = \frac{d^2}{2}$

Seite

$s = \sqrt{A}$

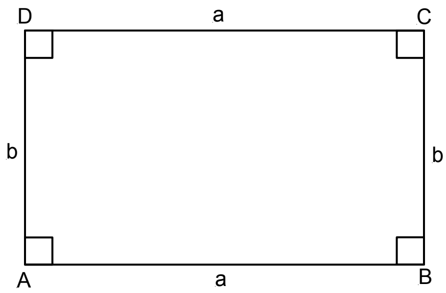
$d = \sqrt{2 \cdot A}$

Umfang

$u = 4 \cdot s$

$s = \frac{u}{4}$

Reckteck



Flächeninhalt

$A = a \cdot b$

Länge/Breite

$a = \frac{A}{b}$ $b = \frac{A}{a}$

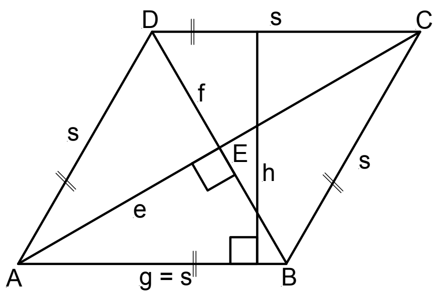
Umfang

$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

$a = \frac{u}{2} - b$

$b = \frac{u}{2} - a$

Rhombus



Flächeninhalt

$A = g \cdot h$

Seite/Höhe

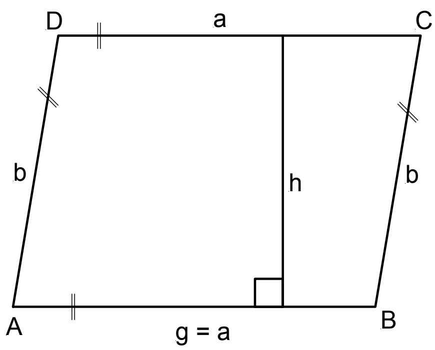
$g = \frac{A}{h}$ $h = \frac{A}{g}$

Umfang

$u = 4 \cdot s = 4 \cdot g$

$s = g = \frac{u}{4}$

Rhomboid



Flächeninhalt

$A = g \cdot h$

Seite/Höhe

$g = \frac{A}{h}$ $h = \frac{A}{g}$

Umfang

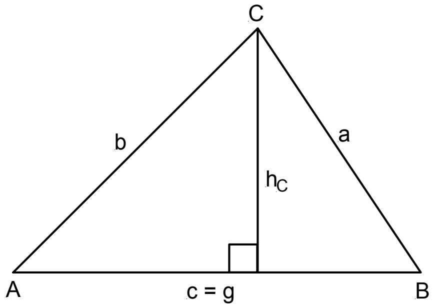
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

$a = \frac{u}{2} - b$

$b = \frac{u}{2} - a$

Anhang Formelsammlung Dreieck/Trapez

Allgemeines Dreieck



Flächeninhalt

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

allgemein

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Seite/Höhe

$$c = \frac{2 \cdot A}{h_c}$$

$$h_c = \frac{2 \cdot A}{c}$$

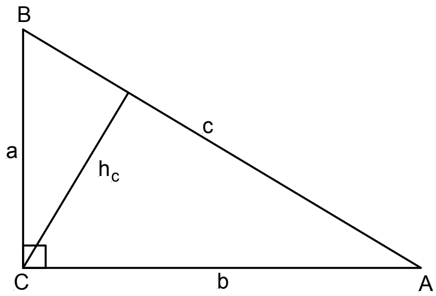
$$g = \frac{2 \cdot A}{h}$$

$$h = \frac{2 \cdot A}{g}$$

Umfang

$u = a + b + c$

Rechtwinkliges Dreieck



Flächeninhalt

① $A = \frac{a \cdot b}{2}$

oder

② $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

aus ① und ②
folgt auch:

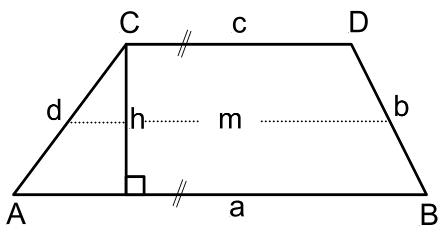
$a \cdot b = c \cdot h_c$

Seite/Höhe

$$a = \frac{2 \cdot A}{b}$$

$$b = \frac{2 \cdot A}{a}$$

Trapezberechnung



$$m = \frac{a + c}{2}$$

Flächeninhalt

$$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$$
$$= m \cdot h$$

Seite/Höhe

$$c = \frac{2 \cdot A}{h} - a$$

$$a = \frac{2 \cdot A}{h} - c$$

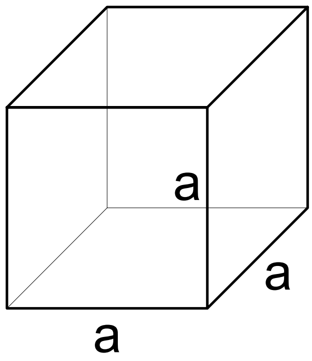
$$h = \frac{2 \cdot A}{a + c}$$

Umfang

$u = a + b + c + d$

Anhang Formelsammlung Prismen/Zylinder

Würfel



Volumen

$V = a^3$

Kantenlänge

$a = \sqrt[3]{V}$

Grundfläche

$A = a^2$

$a = \sqrt{A}$

Mantel

$M = 4 \cdot a^2$

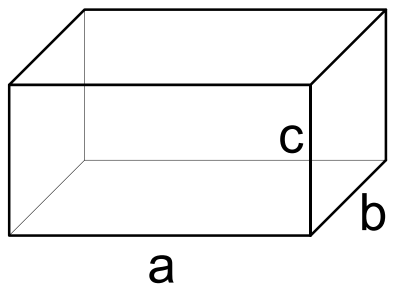
$a = \sqrt{\frac{M}{4}}$

Oberfläche

$O = 6 \cdot a^2$

$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$

Quader



Volumen

$V = a \cdot b \cdot c$

Kantenlänge

$a = \frac{V}{b \cdot c}$

$b = \frac{V}{a \cdot c}$

$c = \frac{V}{a \cdot b}$

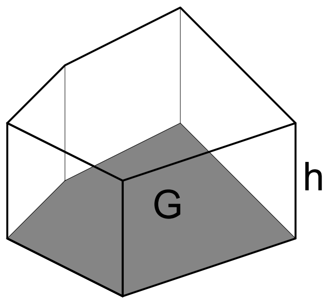
Mantel

$M = 2(a \cdot c + b \cdot c)$

Oberfläche

$O = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Prisma



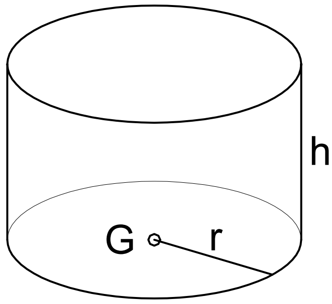
Volumen

$V = G \cdot h$

Oberfläche

$O = 2 \cdot G + M$

Zylinder



Volumen

$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Oberfläche

$O = 2 \cdot G + M$

$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$
$= 2 \cdot r \cdot \pi\ (r + h)$

Anhang

Mathematische Zeichen

+	plus	$\in$	ist Element aus
–	minus	$\notin$	ist kein Element aus
· (*)	mal	$\cap$	geschnitten mit
: (/)	durch	$\cup$	vereinigt mit
=	gleich	$\subset$	ist Teilmenge von
$\neq$	nicht gleich (ungleich)	{ }	leere Menge
$\equiv$	identisch	T	Term
$\approx$	ungefähr	N	Menge der natürlichen Zahlen
∞	unendlich	Z	Menge der ganzen Zahlen
<	kleiner als	Q	Menge der rationalen Zahlen
>	grösser als	B	Menge der Bruchzahlen
$\leq$	kleiner oder gleich	$\perp$	rechtwinklig
$\geq$	grösser oder gleich	$\parallel$	parallel
$\Rightarrow$	daraus folgt		
$\Leftrightarrow$	ist äquivalent mit		
$\sqrt{}$	Wurzel		

Vorsatzzeichen

Zeichen	Vorsatz	Bedeutung	Faktor
T	Tera	Billionenfach	10^{12}
G	Giga	Milliardenfach	10^{9}
M	Mega	Millionfach	10^{6}
k	Kilo	Tausendfach	10^{3}
h	Hekto	Hundertfach	10^{2}
da	Deka	Zehnfach	10^{1}
d	Dezi	Zehntel	10^{-1}
c	Zenti	Hundertstel	10^{-2}
m	Milli	Tausendstel	10^{-3}
μ	Mikro	Millionstel	10^{-6}
n	Nano	Milliardstel	10^{-9}
p	Piko	Billionstel	10^{-12}

Masseinheiten

Länge l (r,s) Einheit: **m** Meter — Verwandlungszahl 10

$1\ m = 10\ dm$
$1\ dm = 10\ cm$
$1\ cm = 10\ mm$

Fläche A Einheit: $\mathbf{m^2}$ Quadratmeter — Verwandlungszahl 100

$1\ km^2 = 100\ ha$
$1\ ha = 100\ a$
$1\ a = 100\ m^2$
$1\ m^2 = 100\ dm^2$
$1\ dm^2 = 100\ cm^2$
$1\ cm^2 = 100\ mm^2$

Volumen V Einheit: $\mathbf{m^3}$ Kubikmeter — Verwandlungszahl 1000

$1\ m^3 = 1000\ dm^3$
$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$
$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$

$1\ dm^3 = 1\ l$ (Liter) $= 1000\ ml$
$1\ cm^3 = 1\ ml$

Masse m («Gewicht») Einheit: **kg** Kilogramm — Verwandlungszahl 1000

$1\ t = 1000\ kg$
$1\ kg = 1000\ g$
$1\ g = 1000\ mg$

Zeit t Einheit: **s** Sekunde

$1d = 24\ h$
$1\ h = 60\ min$
$1\ min = 60\ s$

Bruchteile einer Sekunde werden in Zehntel-, Hundertstel- oder Tausendstelsekunden angegeben.

Temperatur T Einheit: **K** Kelvin

273 K = 0° C
373 K = 100° C

Geschwindigkeit v Einheit: **m/s** Meter pro Sekunde
km/h Kilometer pro Stunde

$$1\ \frac{m}{s} = 3{,}6\ \frac{km}{h}$$

$$0{,}2\bar{7}\ \frac{m}{s} = 1\ \frac{km}{h}$$

Stichwortverzeichnis