Mathebuch 7

Mathematik

Theorie für Schülerinnen und Schüler

Name und Klasse

Inhaltsverzeichnis nach Themen

Arithmetik und Algebra

Geometrie

Inhaltsverzeichnis nach Lernumgebungen

Arithmetik und Algebra

Geometrie

Symbole

LU Lernumgebung

M Merke (Begriffe, Definitionen, Herleitungen)

R Regeln und mathematische Sätze

⇨ Beispiele

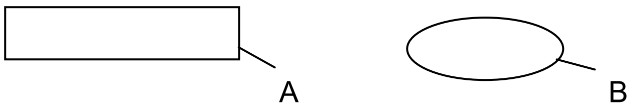
Zahlenmengen

3, 5, 7, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 20, 28, 29, 31, 32

Menge

Unter einer «Menge» versteht man die Zusammenfassung bestimmter wohl unterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Eine Menge M kann durch Zusammenfassung von Objekten genau dann gebildet werden, wenn man eindeutig feststellen kann, ob diese zur Menge M gehören oder nicht.
Mengen lassen sich durch Diagramme (Mengenbilder) darstellen und werden durch grosse Buchstaben des Alphabets gekennzeichnet.

⇨ A, B, C, ...



Elemente

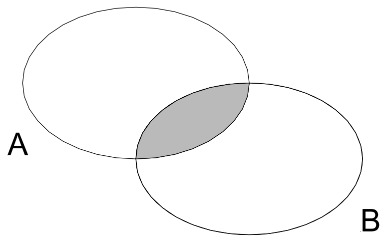
Die Objekte der Mengen bezeichnet man als Elemente.
Diese werden durch kleine Buchstaben des Alphabets symbolisiert.
An Stelle eines Diagramms werden häufig geschweifte Klammern verwendet. Dabei wird jedes Elemente nur einmal aufgeführt.

⇨ $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ..., x_n\}$ $\quad x_1 \in M \quad y \notin M$

Durchschnitt

Unter dem Durchschnitt zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

⇨



in Zeichen:

$A \cap B$

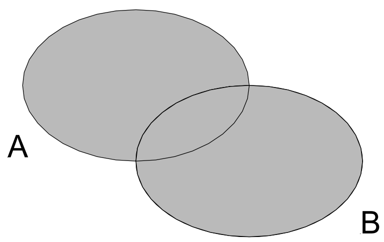
in Worten:

„A geschnitten mit B“ bzw.
„Durchschnitt von A und B“

Vereinigung

Unter der Vereinigung zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden gehören.

⇨



in Zeichen:

$A \cup B$

in Worten:

„A vereinigt mit B“ bzw.
„Vereinigung von A und B“

In mathematischen Fomulierungen wird das Wort «oder» immer im nicht ausschliessenden Sinn verwendet.

Natürliche Zahlen

Menge der **natürlichen** Zahlen
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$

Menge der natürlichen Zahlen einschliesslich der Zahl 0
$N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$

⇨

gerade Zahlen	$G = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$
ungerade Zahlen	$U = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$
Primzahlen	$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$
Quadratzahlen	$Q = \{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$

Rationale Zahlen

Menge der ganzen Zahlen
$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

⇨

positive ganze Zahlen	$Z^+ = N = \{+1, +2, +3, +4, +5, ...\}$
negative ganze Zahlen	$Z^- = \{-1, -2, -3, -4, -5, ...\}$

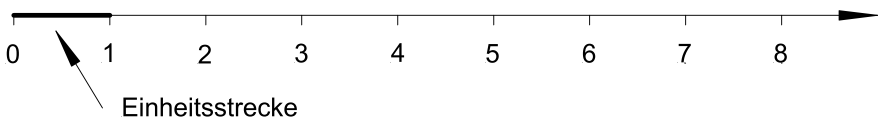
Menge B der Bruchzahlen

⇨

gewöhnliche Brüche	$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{6}{7}, ...$
endliche Dezimalzahlen	3.25 , 0.75 , 0.1 , 0.4 , ...
periodische Dezimalzahlen	$0.\overline{3}$, $0.1\overline{6}$, ...

Zahlenstrahl

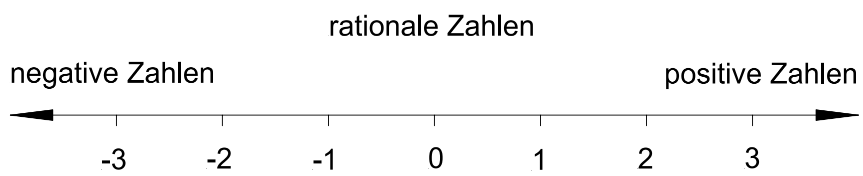
Natürliche Zahlen lassen sich auf einem Zahlenstrahl darstellen.
Das ist eine Halbgerade mit einer gleichmässigen Skala.



Sie muss so gewählt werden, dass jede der darzustellenden Zahlen durch eine Strecke veranschaulicht wird, die auf dem zur Verfügung stehenden Platz abgemessen werden kann.

Zahlengerade

Um gewisse Einschränkungen aufzuheben, erweitert man den Zahlenstrahl nach links über den Nullpunkt hinaus und erhält die Zahlengerade.



Grosse Zahlen – Zehnerpotenzen

LU 5, 6, 7, 12, 17

Zehnerpotenz

M Die Bündelungszahlen lassen sich wesentlich einfacher darstellen, wenn man die Potenz-Schreibweise verwendet.

10	=	10	=	10^1
100	=	$10 \cdot 10$	=	10^2
1000	=	$10 \cdot 10 \cdot 10$	=	10^3
10000	=	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	=	10^4
100000	=	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	=	10^5

usw.

Potenz — $\boxed{10^5}$ — Exponent (Hochzahl), Basis (Grundzahl)

in Worten: „zehn hoch fünf“ oder „5-te Potenz von 10“

R *Schreibfiguren wie 10^2, 10^3, 10^4, ... heissen Zehnerpotenzen.*
Dabei gibt der Exponent an, wie oft die Basis als Faktor zu nehmen ist.

⇨ 10^{21} = 1 Trilliarde
10^{18} = 1 Trillion
10^{15} = 1 Billiarde
10^{12} = 1 Billion
10^{9} = 1 Milliarde
10^{6} = 1 Million

«grosse» Zahlen

M Mit Hilfe von Zehnerpotenzen können auch «grosse Zahlen» geschrieben werden:

⇨ 587 000 000 = $587 \cdot 1000000$ = $587 \cdot 10^6$

oder in der «wissenschaftlichen» Schreibweise:

$5.87 \cdot 10^8$

R *Der erste Faktor hat genau eine Wertziffer vor dem Komma, der zweite ist eine Zehnerpotenz.*

Zahlensysteme

LU 1, 3, 4, 5

Dezimal-System (Zehner-System)

Im Dezimal-System verfügen wir über 10 Symbole mit den **Ziffern**:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Eigenwert

Die Zahl 805 besteht somit aus den Ziffern **8**, **0** und **5**.

Jede dieser Ziffern hat einen **Eigenwert** (Ziffernwert).

Stellenwert

Bei der Zahl 805 (mehrstellige Zahl) hat zusätzlich jede Ziffer aufgrund ihrer Position einen anderen **Stellenwert**.

8 0 5

Wert der ersten Stelle

5 Einer $= 5 \cdot 1 = \mathbf{5 \cdot 10^0}$

Wert der zweiten Stelle

0 Zehner $= 0 \cdot 10 = \mathbf{0 \cdot 10^1}$

Wert der dritten Stelle

8 Hunderter $= 8 \cdot 100 = \mathbf{8 \cdot 10^2}$

Im Dezimal-System sind die Stellenwerte die Potenzen der Basis 10.

⇨ Zahl 805

8		0		5		
$8 \cdot 10^2$	+	$0 \cdot 10^1$	+	$5 \cdot 10^0$		
800	+	0	+	5	=	805

Dual-System
(Zweier-
System)

Das Dual-System oder auch Binär-System verwendet die Zahl 2 als Basis und benützt nur die beiden Ziffern **0** und **1**.

Computer arbeiten auf dieser Grundlage.

Umrechnung
Dezimal
in Dual

Die Dezimalzahl wird fortlaufend durch die Zahl 2 dividiert. Die Reste jedes Divisionsschrittes ergeben in umgekehrter Reihenfolge die Dualzahl.

Dezimalzahl 38

38	:	2	=	19	Rest 0
19	:	2	=	9	Rest 1
9	:	2	=	4	Rest 1
4	:	2	=	2	Rest 0
2	:	2	=	1	Rest 0
1	:	2	=	0	Rest 1

Dualzahl von 38 = 1 0 0 1 1 0

Kurzschreibweise: $38 = 100110_2$

Umrechnung
Dual in
Dezimal

*Im Dual-System sind die Stellenwerte die **Potenzen der Basis 2**.*

Dualzahl $1\,0\,0\,1\,1\,0_2$
(gesprochen: „eins, null, null, eins, eins, null im Zweier-System“)

⇨

1		0		0		1		1		0		
$1\cdot\mathbf{2}^5$	+	$0\cdot\mathbf{2}^4$	+	$0\cdot\mathbf{2}^3$	+	$1\cdot\mathbf{2}^2$	+	$1\cdot\mathbf{2}^1$	+	$0\cdot\mathbf{2}^0$		
32	+	0	+	0	+	4	+	2	+	0	=	38

Grössen

LU 1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 18, 20, 22, 31, 34, 35

Grössen

M Grössen sind benannte Zahlen. Sie bestehen aus Zahlenwert mal Einheit. Das Malzeichen wird nicht geschrieben.

⇨ 5 m ; 10 kg ; 20 km ; 1000 kWh

Zusammengesetzte Grössen

M Grössen beschreiben messbare physikalische Eigenschaften wie Länge, Masse («Gewicht»), Leistung, Geschwindigkeit usw.

Das hat oft zur Folge, dass Grössen zusammengesetzt werden müssen.

R *Die Geschwindigkeit eines Körpers wird in der Physik z. B. wie folgt berechnet:*

$v = s : t = \frac{s}{t}$ → *mögliche Massbenennungen:* $\frac{m}{s} \rightarrow \frac{km}{h}$

Runden

Rechenergebnisse, die nach dem Komma mehr Stellen aufweisen als es die Genauigkeit verlangt, werden ab- oder aufgerundet. Die Dezimalstelle, an der nach dem Runden die letzte Ziffer steht, wird mit Rundungsstelle bezeichnet.

R *Abrunden*

Steht rechts neben der gewählten Rundungsstelle eine der Ziffern 0 bis 4, so wird abgerundet, d.h. die Rundungsstelle bleibt unverändert.

⇨ *30.4736 ≈ 30.47 (auf 2 Dezimalen gerundet)*

R *Aufrunden*

Steht rechts neben der gewählten Rundungsstelle eine der Ziffern 5 bis 9, so wird aufgerundet, d.h. die Rundungsstelle wird um 1 erhöht.

⇨ *30. 4736 ≈ 30.5 (auf 1 Dezimale gerundet)*

Schätzen

Oft braucht man gar kein genaues Resultat, ein Abschätzen genügt.

Rechnung		gerundete Werte	Schätzwert	genauer Wert
⇨ 45 · 111	→	50 · 100	5000	4995
31588 : 53	→	30000 : 50	600	596

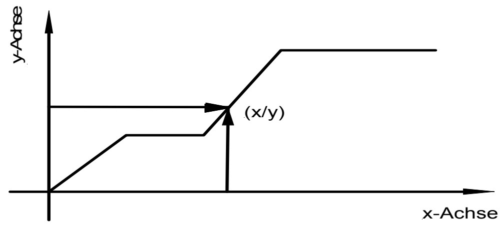
Grafiken – Diagramme

LU 2, 18, 23

Grafiken

Koordinatensystem

M Grafiken zeigen den Verlauf eines Sachverhaltes. Dazu benötigt man die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems.



Zu jedem x-Wert gehört ein ganz bestimmter y-Wert.
Zwei solche Werte bilden in dieser Reihenfolge ein geordnetes Zahlenpaar (x,y).
Jedem dieser geordneten Zahlenpaare lässt sich ein Punkt im Koordinatensystem (auch Gitternetz genannt) zuordnen.

Für die Einheiten auf den beiden Achsen müssen von Fall zu Fall passende Längen abgetragen werden.

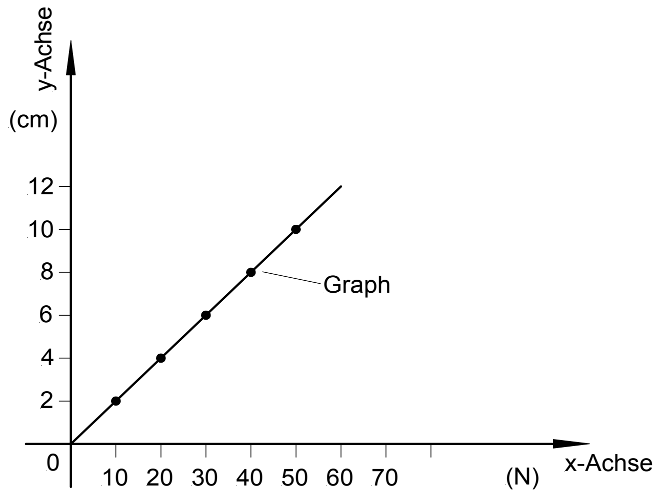
Graphen

M Graphen sind grafische Darstellungen von Beziehungen zwischen den Elementen einer Menge in Form von Punktmengen, bei denen gewisse Punktepaare durch Kurven oder Strecken verbunden sind.

Wird eine Federwaage verschieden belastet, so entsteht nachfolgende Messreihe:

Tabellen

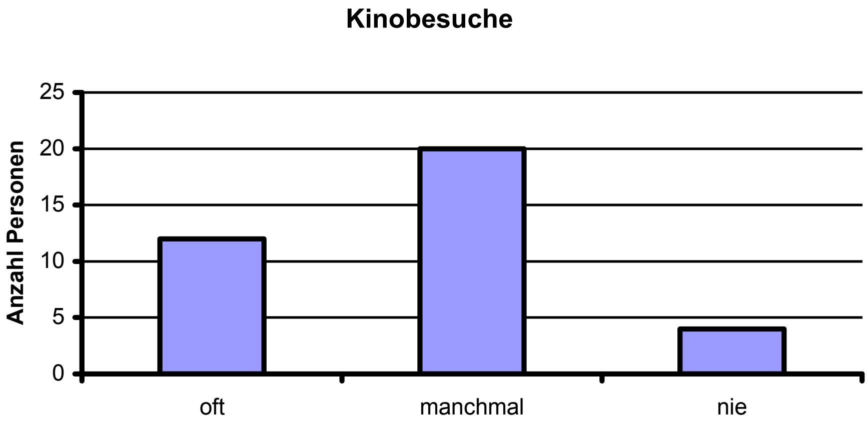
x: Gewicht in N (Newton)	10	20	30	40	50	60	. . .
y: Ausdehnung in cm	2	4	6	8	10	12	. . .



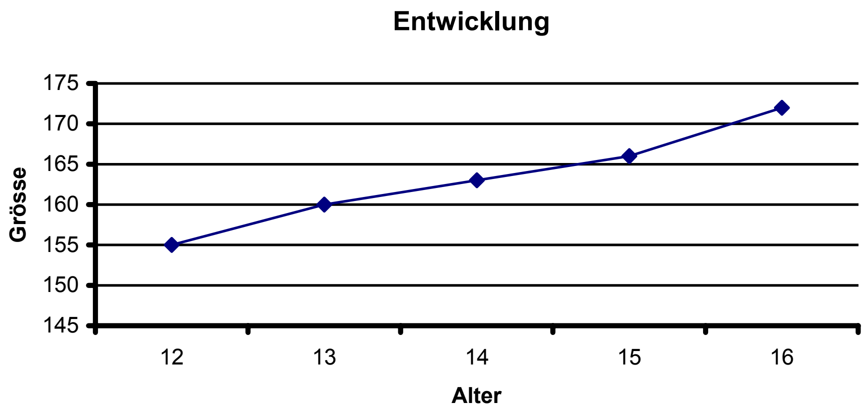
R *Die Bildpunkte liegen auf einer Halbgeraden aus dem Nullpunkt (0/0).*

Diagramme

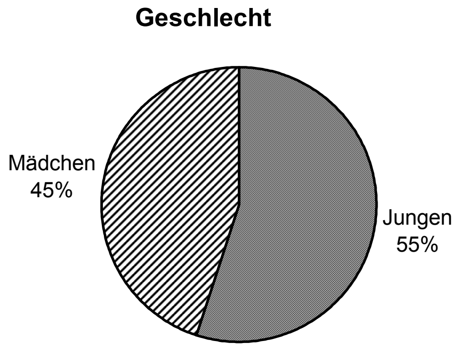
Stabdiagramm
(Säulen-
diagramm)



**Linien-
diagramm**



**Kreis-
diagramm**



Funktionen

LU 2, 4, 10, 14, 15, 18, 20, 31, 34

Funktion

Eine eindeutige Zuordnung zwischen Zahlenmengen nennt man ***Funktion***.

Bei einer Funktion (f) wird einem Element x der Menge A ein Element y der Menge B durch eine bestimmte Vorschrift eindeutig zugeordnet.

$$\underbrace{x}_{\text{Argument}} \xrightarrow{\text{«zugeordnet»}} \underbrace{y}_{\text{Funktionswert}} \qquad x \in A \quad \text{und} \quad y \in B$$

Meist wird aber das Element $y \in B$ mit f (x) bezeichnet.

$$x \longrightarrow f(x) \qquad x \in A \quad \text{und} \quad f(x) \in B$$

Man kann auch an Stelle von f (x) den Funktionsterm angeben,
z. B.: $2x + 3$

$$x \longrightarrow 2x + 3 \qquad x \in A \quad \text{und} \quad 2x + 3 \in B$$

Funktionsgleichung

In vielen Fällen gibt man nun eine Funktion durch eine Gleichung (Aussageform) wieder, die man **Funktionsgleichung** nennt.

⇨ $x \longrightarrow y \qquad x \longrightarrow f(x) \qquad x \longrightarrow 2x + 3$

$$\boxed{\underbrace{y}_{\text{2. Variable}} = f(x) = \underbrace{2x + 3}_{\text{1. Variable}}} \quad \text{Funktionsgleichung}$$

Allgemeine Funktionsgleichung: $\boxed{y = ax \pm b}$ *(a, b ∈ B)*

Anwendung

⇨ Suche die passende Funktionsgleichung in der Form $y = ax + b$ für folgende Wertetabelle:

steigend →

x	2	8	19	25
y	16	34	67	85

steigend →

Gleichung ① $16 = 2a + b$

Gleichung ② $34 = 8a + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 34 - 8a$

② in ① $\Rightarrow \quad 16 = 2a + 34 - 8a$

$6a = 18 \qquad\qquad b = 34 - 8 \cdot 3$

$a = 3 \qquad\qquad b = 10$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y = 3x + 10}$$

Grundoperationen

LU 1, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 28, 29, 30

Operationen erster Stufe

Addition

59	+	26	=	85	„addieren“
Summand	plus	Summand		ausgerechnete Summe	

$\underbrace{\text{Summand plus Summand}}_{\text{Summe}}$

Subtraktion

37	–	14	=	23	„subtrahieren“
Minuend	minus	Subtrahend		ausgerechnete Differenz	

$\underbrace{\text{Minuend minus Subtrahend}}_{\text{Differenz}}$

Verbindung Operationen erster Stufe

R *Die Operationen werden der Reihe nach von links nach rechts ausgeführt.*

⇨ 57 + 6 – 17 = 63 – 17 = 46

R *Bei Operationen mit Klammern werden zuerst die Klammerausdrücke berechnet.*

⇨ 23 + (12 – 8) = 23 + 4 = 27

Klammerregel

R *Steht ein Pluszeichen vor einer Klammer, so darf die Klammer weggelassen werden.*

⇨ 38 + (21 + 9) = 68   46 + (12 – 7) = 51

38 + 21 + 9 = 68   46 + 12 – 7 = 51

R *Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer, so darf die Klammer aufgelöst werden, wenn man alle Operationszeichen in der Klammer wechselt.*

⇨ 38 – (21 + 9) = 8   46 – (12 – 7) = 41

38 – 21 – 9 = 8   46 – 12 + 7 = 41

Operationen zweiter Stufe

Multiplikation

$$13 \cdot 7 = 91$$

$\underbrace{\text{Faktor} \quad \text{mal} \quad \text{Faktor}}_{\text{Produkt}}$ = ausgerechnetes Produkt

„multiplizieren“

Division

$$91 : 7 = 13$$

$\underbrace{\text{Dividend} \quad \text{durch} \quad \text{Divisor}}_{\text{Quotient}}$ = ausgerechneter Quotient

„dividieren“

Verbindung Operationen zweiter Stufe

Die Operationen werden der Reihe nach von links nach rechts ausgeführt.

⇨ $52 \cdot 6 : 13 = 312 : 13 = 24$

Bei Operationen mit Klammern werden zuerst die Klammerausdrücke berechnet.

⇨ $23 \cdot (12 : 3) = 23 \cdot 4 = 92$

Klammerregel

Steht ein Multiplikationszeichen vor einer Klammer, so darf die Klammer weggelassen werden.

⇨ $54 \cdot (9 \cdot 3) = 1458$ $\qquad$ $1092 \cdot (12 : 4) = 3276$

$54 \cdot 9 \cdot 3 = 1458$ $\qquad$ $1092 \cdot 12 : 4 = 3276$

Steht ein Divisionszeichen vor einer Klammer, so darf die Klammer aufgelöst werden, wenn man alle Operationszeichen in der Klammer wechselt.

⇨ $54 : (9 \cdot 3) = 2$ $\qquad$ $1092 : (12 : 4) = 13$

$54 : 9 : 3 = 2$ $\qquad$ $1092 : 12 \cdot 4 = 13$

Rechengesetze

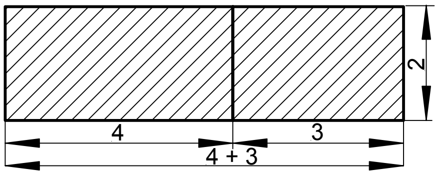
LU 3, 5, 10, 11, 17, 28, 29, 30

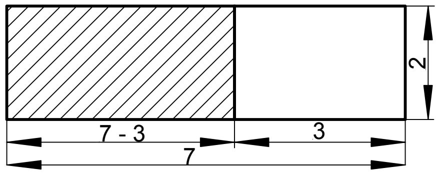
Zusammengesetzte Terme

Verbindung Operationen erster und zweiter Stufe	R	*Um Unsicherheiten zu vermeiden und um Klammern zu sparen, hat man vereinbart, dass in klammerfreien Termen immer zuerst die Punktrechnungen (· oder :), dann die Strichrechnungen (+ oder –) ausgeführt werden.* *Jede andere Reihenfolge muss immer durch Klammern angezeigt werden.*
	⇨	$98 + 2 \cdot 2 = 98 + 4 = 102$ $104 - 4 : 2 = 104 - 2 = 102$
Kommutativ-gesetz (Vertauschungsgesetz)	R	*Die ausgerechnete Summe ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden.* $a + b = b + a$ *Das ausgerechnete Produkt ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.* $a \cdot b = b \cdot a$
	⇨	$32 + 68 = 68 + 32 = 100$ $9 \cdot 5 = 5 \cdot 9 = 45$
Assoziativ-gesetz (Zusammenfassungs-gesetz)	R	*Die ausgerechnete Summe ist unabhängig davon, wie man die Summanden zusammenfasst.* $(a + b) + c = a + (b + c)$ *Das ausgerechnete Produkt ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
	⇨	$(100 + 54) + 46 = 100 + (54 + 46) = 200$ $(12 \cdot 4) \cdot 25 = 12 \cdot (4 \cdot 25) = 1200$

Distributivgesetz
(Verteilungsgesetz)

Die Flächeninhalte der schraffierten Rechtecke können auf je zwei Arten berechnet werden.





$2 \cdot (4 + 3) = 14$

$2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14$

$\Rightarrow \quad 2 \cdot (4 + 3) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$

allgemein gilt:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Diese Verknüpfungseigenschaft heisst Verteilungsgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition.

$2 \cdot (7 - 3) = 8$

$2 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 8$

$\Rightarrow \quad 2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$

allgemein gilt:

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Diese Verknüpfungseigenschaft heisst Verteilungsgesetz der Multiplikation bezüglich der Subtraktion.

Ausmultiplizieren

Werden Produkte in Summen bzw. Differenzen umgewandelt, so spricht man vom ***«Ausmultiplizieren»****.*

⇨ $5 \cdot (a + 13) = 5a + 65$ $\qquad$ $19 \cdot (x - 1) = 19x - 19$

$7c \cdot (a^2 + b) = 7a^2c + 7bc$ $\qquad$ $y^2 \cdot (12 - y^3) = 12y^2 - y^5$

Ausklammern

Werden Summen bzw. Differenzen in Produkte umgewandelt, so spricht man vom ***«Ausklammern»****.*

⇨ $5 \cdot 7 + 5 \cdot x = 5 \cdot (7 + x)$ $\qquad$ $238 - 28c = 14\,(17 - 2c)$

$x \cdot y + 80 \cdot x = x \cdot (y + 80)$ $\qquad$ $mn - m = m\,(n - 1)$

Abmachungen

- In Schlussergebnissen ist es üblich, Produkte wie $x \cdot 7$; $y \cdot 12$ usw. in der Form $7 \cdot x$ (oder $7x$); $12 \cdot y$ (oder $12y$) usw. zu schreiben.
- Der Malpunkt vor bzw. nach einer Klammer kann weggelassen werden.
- Verschiedene Platzhalter (Variable) in einem Produkt werden normalerweise in alphabetischer Reihenfolge notiert.
- «Schreibe als Produkt» heisst von jetzt an «Klammere den grösstmöglichen Faktor aus».

Potenzen

LU 5, 6, 14, 17

Begriffe

Kommt in einem Produkt mehrmals der gleiche Faktor vor, so kann man eine abgekürzte Schreibweise verwenden.

Basis Exponent

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = \boxed{8^3} = 512$$

Produkt mit gleichen Faktoren Potenz Potenzwert

Die Verknüpfung zweier Zahlen aus N_0 durch Höherstellung der zweiten heisst potenzieren.
Ein Term von der Form a^b heisst b-te Potenz von a.

Allgemein gilt für a^b (lies: «a hoch b») mit $a, b \in N_0$:

1. *Für $b > 1$: $a^b = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (b Faktoren)*
2. *Für $b = 1$: $a^1 = a$*
3. *Für $b = 0$: $a^0 = 1$, falls $a \neq 0$!*

Potenzregeln

a) Potenzen mit gleicher Basis

MULTIPLIKATION

⇨ $3^2 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 3^{2+4}$

$\boldsymbol{x^a \cdot x^b = x^{a+b}}$

DIVISION

⇨ $3^6 : 3^2 = 3^4$, denn $3^4 \cdot 3^2 = 3^6$; $3^6 : 3^2 = 3^4 = 3^{6-2}$

$\boldsymbol{x^a : x^b = x^{a-b}}$

b) Potenzen mit gleichem Exponenten

MULTIPLIKATION

⇨ $3^2 \cdot 4^2 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) = (3 \cdot 4)^2$

$\boldsymbol{x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a}$

DIVISION

⇨ $15^2 : 3^2 = 5^2$, denn $5^2 \cdot 3^2 = 15^2$; $15^2 : 3^2 = 5^2 = (15 : 3)^2$

$\boldsymbol{x^a : y^a = (x : y)^a}$

Teilbarkeit – Primzahlen

LU 7, 20, 29

<table>
<tr><td>Teilbarkeit</td><td>M</td><td>Rest bei einer Division

675 : 25 = 27
675 : 19 = 35, Rest 10

Bei der Division von natürliche Zahlen können immer die folgenden zwei Fälle auftreten.
a) Die Division geht auf, d.h. der Rest ist gleich 0.
b) Die Division geht nicht auf, d.h. der Rest ist nicht gleich 0.</td></tr>
<tr><td></td><td>R</td><td>a : b = c, Rest d ist gleichbedeutend mit $a = b \cdot c + d$</td></tr>
<tr><td>Teiler und Vielfache</td><td>M</td><td>Genau dann, wenn die Division a : b den Rest 0 hat, sagt man:
„a ist Vielfaches von b“ oder
„a ist durch b teilbar“ oder
„b ist Teiler von a“ oder
„b ist in a enthalten“.</td></tr>
<tr><td>Teilbarkeits-regeln</td><td>M</td><td>x-er-Rest

154 : 17 = 9, Rest 1
290 : 17 = 17, Rest 1
732 : 17 = 43, Rest 1

Unter dem x-er-Rest versteht man den Rest, der bei der Division einer Zahl durch x entsteht.</td></tr>
<tr><td></td><td>⇨</td><td>Bestimme die Menge M aller natürlicher Zahlen die kleiner als 50 sind und den 8er-Rest 5 haben.

M = {5, 13, 21, 29, 37, 45}</td></tr>
<tr><td></td><td>M</td><td>Zehnerrest – Hunderterrest
Es sei r der Zehnerrest einer natürlichen Zahl a.
Dann ist $a = 10 \cdot n + r$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.
• Der Zehnerrest r einer natürlichen Zahl a ist gleich der Endziffer dieser Zahl a.
• Für den Hunderterrest gilt demnach:
Er ist gleich der Zahl, die aus den zwei letzten Ziffern dieser Zahl gebildet wird.</td></tr>
<tr><td></td><td>⇨</td><td>$\mathbf{5} = 10 \cdot 0 + \mathbf{5}$
$3\mathbf{7} = 10 \cdot 3 + \mathbf{7}$
$12\mathbf{4} = 10 \cdot 12 + \mathbf{4}$
$860\mathbf{3} = 10 \cdot 860 + \mathbf{3}$</td></tr>
</table>

Regeln	*Teiler*	*Regel*	⇩
	2	*Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine durch 2 teilbare Zahl ist.*	356 – da 6 durch 2 teilbar ist.
	4	*Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzten zwei Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl ist.*	6536 – da 36 durch 4 teilbar ist.
	8	*Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl ist.*	33816 – da 816 durch 8 teilbar ist.
	5	*Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihr Zehnerrest durch 5 teilbar ist, d.h. die letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist.*	295 – da 5 durch 5 teilbar ist.
	25	*Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn ihr Hunderterrest durch 25 teilbar ist, d.h. die letzten zwei Ziffern 00, 25, 50 oder 75 sind.*	13475 – da 75 durch 25 teilbar ist.

Quersumme

Unter der Quersumme einer natürlichen Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern.

⇨ 267 ⇒ 2 + 6 + 7 = 15 726 ⇒ 7 + 2 + 6 = 15
1345 ⇒ 1 + 3 + 4 + 5 = 13 89045 ⇒ 8 + 9 + 0 + 4 + 5 = 26

Regeln

1. *Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.*
2. *Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.*

⇨ 1392 – da die Quersumme 15 beträgt, ist 1392 durch 3 teilbar.

1215 – da die Quersumme 9 beträgt, ist 1215 durch 9 teilbar.

3. *Eine natürliche Zahl ist genau dann*
   - *durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist.*
   - *durch 12 teilbar, wenn sie durch 3 und 4 teilbar ist.*
   - *durch 15 teilbar, wenn sie durch 3 und 5 teilbar ist.*
   - *usw.*

Primzahlen

Eine natürliche Zahl mit genau 2 Teilern heisst Primzahl.
Primzahlen sind also natürliche Zahlen grösser als 1 und nur durch 1 und sich selbst teilbar.

⇨ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, . . .

Terme

LU 6, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 28, 29

Aufbau von Termen

1. Zahlen, Platzhalter und Grössen sind Terme.

   0, 4, 137, ∆, □, a, b, x, y, 2 Fr., 5 min, 7 kg, 246 m

2. Werden Terme addiert, subtrahiert, multiplizert, dividiert oder potenziert, so erhält man wiederum einen Term.

   $4 + a$
   $b - 98$
   $x \cdot y$
   $6 : z$
   y^4
   $7 \cdot (4 + c)$

3. Ist T = T‘ und ist T ein Term gemäss 1. oder 2., so heisst auch T‘ ein Term.

   $b \cdot b = b^2$
   $5\,(a + b) = 5a + 5b$
   $1 = x^0$
   $a^2 - a = a\,(a - 1)$

Für den Begriff «Platzhalter» verwendet man auch den Begriff «Variable».

Terme ohne Variablen

Das sind Terme, die eine bestimmte Zahl darstellen.
Wenn nötig findet man diese Zahl durch Ausrechnen des Terms (schrittweises Umformen).

⇨ $109 + 15 - 12 = 124 - 12 = 112$

$8 \cdot (37 - 14) = 8 \cdot 23 = 184$

$(19 + 23) : (15 - 8) = 42 : 7 = 6$

$75 - (4 \cdot 5 + 35 : 7) = 75 - (20 + 5) = 75 - 25 = 50$

Terme mit Variablen

Das sind Terme, die keine bestimmte Zahl darstellen. Man kann sie nicht ausrechnen, sondern nur umformen.

⇨ $9y + 7y + 5y = (9 + 7 + 5)\,y = 21y$

Summe ⟶ Produkt

$x^2 - x = x \cdot x - x \cdot 1 = x\,(x - 1)$

Differenz ⟶ Produkt

$b^4\,(3c + 2d) = 3b^4c + 2b^4d$

Produkt ⟶ Summe

$(a - b) \cdot 4 = 4a - 4b$

Produkt ⟶ Differenz

Termumformungen

Die bei den Operationen in N_0 schon verwendeten Rechengesetze (Vertauschungsgesetz, Zusammenfassungsgesetz, Verteilungsgesetz, Potenzgesetze, Klammerregeln usw.) sind immer so genannte Termumformungen, wenn sie in einer gegebenen Grundmenge durchführbar sind.

⇨ $(11 - 9)^2 = 11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 + 9^2$

$7a + a^3 = a\,(7 + a^2)$

$$\begin{aligned} 2(21m + 16n) - (2m + (8m + 4n)) &= 42m + 32n - 2m - 8m - 4n \\ &= 32m + 28n \end{aligned}$$

Gleichungen

LU 14, 15, 16, 17

Gleichung

Setzt man zwischen zwei Terme ein Gleichheitszeichen, so erhält man eine Gleichung.
$T_1 = T_2$ heisst eine Gleichung.

Gleichungen ohne Variablen ⟶ A u s s a g e n

①	$4^3 \cdot 5^3 = 20^3$	ist eine wahre Aussage
②	$4^3 \cdot 5^3 = 20^3$	ist eine falsche Aussage

Gleichungen mit Variablen ⟶ A u s s a g e f o r m e n

①	$3x + 7 = 19$	hat die Lösungsmenge L = {4} bezüglich der Grundmenge N_0.
②	$y + 8 = 2$	hat die Lösungsmenge L = { } bezüglich der Grundmenge N_0.

Gleichungen mit einer Variablen

Kommt in einer Gleichung nur eine einzige Variable (ein oder mehrere Male) vor, so spricht man von einer Gleichung mit einer Variablen.

$x = 11$	$L_1 = \{11\}$	$5x = 35$	$L_5 = \{7\}$
$x + 5 = 16$	$L_2 = \{11\}$	$15 + 5x = 100 : 2$	$L_6 = \{7\}$
$4(x + 3) = 34 + 2x$	$L_3 = \{11\}$	$5(4 + x) - 2 = 53$	$L_7 = \{7\}$
$3 + 2(x + 5) = 5 \cdot 7$	$L_4 = \{11\}$	$8 + 5(4 + x) = 63$	$L_8 = \{7\}$

Zwei Gleichungen $T_1 = T_2$ und $T_3 = T_4$, die bezüglich derselben Grundmenge die gleiche Lösungsmenge besitzen, nennt man ***ä q u i v a l e n t****.*

In Zeichen: $T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_3 = T_4$
In Worten: *"$T_1 = T_2$ ist äquivalent zu $T_3 = T_4$".*

$$x = 11 \Leftrightarrow 3 + 2(x + 5) = 5 \cdot 7$$
$$x + 5 = 16 \Leftrightarrow 2(x + 5) = 2^5$$
$$x + 5 = 42 \Leftrightarrow 2(x + 5) = 32$$

Werden die Terme einer Gleichung nach den bekannten Rechengesetzen durch Termumformungen ersetzt, so entstehen immer äquivalente Gleichungen.

**Gleichungs-
regeln**

Formt man Gleichungen nach folgenden Regeln um, so entstehen äquivalente Gleichungen.

① Die Terme einer Gleichung können nach den bekannten Rechengesetzen umgeformt werden (Termumformungen → TU).

② Auf beiden Seiten einer Gleichung kann man dieselbe natürliche Zahl addieren oder subtrahieren.

③ Auf beiden Seiten einer Gleichung kann man dasselbe Vielfache einer Variablen addieren oder subtrahieren.

④ Beide Seiten einer Gleichung kann man mit derselben natürlichen Zahl multiplizieren oder dividieren.

⇨
$$
\begin{aligned}
& 3(2x - 3) = 5(x + 2) \\
\Leftrightarrow\quad & 6x - 9 = 5x + 10 \\
\Leftrightarrow\quad & 6x - 9 - 5x = 5x + 10 - 5x \\
\Leftrightarrow\quad & x - 9 = 10 \\
\Leftrightarrow\quad & x - 9 - 9 = 10 + 9 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 19
\end{aligned}
$$

**Lösungs-
verfahren**

Will man für eine komplizierte Gleichung mit einer Variablen die Endgleichung bestimmen, so ist es zweckmässig, die gegebene Gleichung durch Anwendung der vier Gleichungsregeln in eine äquivalente Gleichung von der Form $x = a$ mit $a \in N_0$ umzuformen.

Damit die Darstellung der Gleichungsumformungen übersichtlicher wird, bringen wir sie auf eine einfachere Form.

Vereinfachte Darstellung

1. Das Zeichen ⇔ wird weggelassen.
2. Werden beide Seiten der Gleichung $T_1 = T_2$ auf dieselbe Weise verändert, so gibt man diese Veränderung rechts von der betreffenden Gleichung in Kurzschreibweise an.
3. Eine Gleichung von der Form $x = a$ mit $a \in N_0$ nennt man nun **<u>Endgleichung</u>**.

⇨

$9x + 68$	=	$5(x + 24)$	TU	gegebene Gleichung
$9x + 68$	=	$5x + 120$	$\mid -5x$	↓
$4x + 68$	=	120	$\mid -68$	↓
$4x$	=	52	$\mid :4$	↓
x	=	13		Endgleichung

Brüche

LU 1, 3, 4, 5, 9, 11, 20, 21, 30

Brucharten

Echte Brüche	Ein echter Bruch stellt eine Bruchzahl dar, die kleiner als 1 ist, d.h. **Zähler < Nenner** ⇨ $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{13}{17}$.
Stammbrüche	Stammbrüche sind echte Brüche, bei denen der Zähler 1 ist. ⇨ $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}$
Unechte Brüche	Ein unechter Bruch stellt eine Bruchzahl dar, die 1 oder grösser als 1 ist, d.h. **Zähler $\geq$ Nenner** ⇨ $\frac{84}{52}, \frac{59}{30}, \frac{121}{12}$
Scheinbrüche	Scheinbrüche sind spezielle unechte Brüche; die Division von Zähler durch Nenner ergibt eine natürliche Zahl. ⇨ $\frac{3}{3}, \frac{12}{4}, \frac{80}{16}$
Gemischte Zahlen	Die gemischte Zahl ist eigentlich eine Summe aus einer natürlichen Zahl und einem echten Bruch oder die Umformung eines unechten Bruches. ⇨ $2\frac{4}{7} = 2 + \frac{4}{7}$ $\quad$ $5\frac{3}{125} = 5 + \frac{3}{125}$ $\frac{84}{52} = 1\frac{8}{13}$ $\quad$ $\frac{59}{30} = 1\frac{29}{30}$

Umwandlung der Brucharten

Ganze Zahl in Scheinbruch	⇨ $1 = \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots$ $\quad 24 = \frac{48}{2} = \frac{120}{5} = \ldots$
Gemischte Zahl in unechten Bruch	M Die ganze Zahl wird mit dem gegebenen Nenner in einen Scheinbruch umgewandelt und zum Bruch addiert. (siehe Addition und Multiplikation) ⇨ $4\frac{3}{8} = \frac{35}{8} \quad 6\frac{12}{17} = \frac{114}{17}$
Unechter Bruch in gemischte Zahl	M Die Division des Bruchs ergibt die ganze Zahl, der Rest den Zähler des Bruchs. ⇨ $\frac{19}{4} = 4\frac{3}{4} \quad 19 : 4 = 4$, Rest 3
Dezimalzahl in Bruch	M Aufgrund der Anzahl Stellen nach dem Komma wird durch die entsprechende 10er-Potenz dividiert. ⇨ $0.875 = \frac{875}{1000}$
Bruch in Dezimalzahl	M Der Zähler des Bruchs wird durch seinen Nenner dividiert. ⇨ $\frac{1}{5} = 1 : 5 = 0.2 \quad \frac{7}{12} = 0.58\overline{3}$
Bruch in Prozent	⇨ $\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0.25 = \frac{25}{100} = 25\%$ (siehe Prozent – Promille)

Prozent – Promille

LU 1, 20, 21, 23

Prozent	M	Abkürzung % lat. pro centum, heisst «für hundert» ⇨ 4% von 150 Fr. = $\frac{4}{100}$ von 150 Fr. = $\frac{4}{100} \cdot 150$ Fr. = 6 Fr.
Promille	M	Abkürzung ‰ lat. pro mille, heisst «für tausend» ⇨ 8 ‰ von 240 m = $\frac{8}{1000}$ von 240 m = $\frac{8}{1000} \cdot 240$ m = 1.92 m

Zuordnungen – Proportionalität

LU 1, 2, 4, 6, 10, 18, 20, 21, 22, 31, 34

Wertetabelle

M Ein Fahrzeug bewegt sich während einer Stunde in gleichmässiger Fahrt auf einer Autobahn. Die Wege, die es dabei in 1, 2, 3, 4, 5 usw. Minuten durchfährt, sind in der folgenden **Wertetabelle** festgehalten.

x: Zeit in min	1	2	3	4	5	...	...
y: Weg in km	3	6	9	12	15	...	...

Geordnete Zahlenpaare

Die Menge dieser **geordneten Zahlenpaare (x,y)** ist eine Funktion.

Bildet man den Quotienten $\frac{y}{x}$, so ergeben alle Wertepaare die gleiche Zahl, die man Proportionalitätsfaktor a nennt; die geordneten Zahlenpaare sind *quotientgleich*.

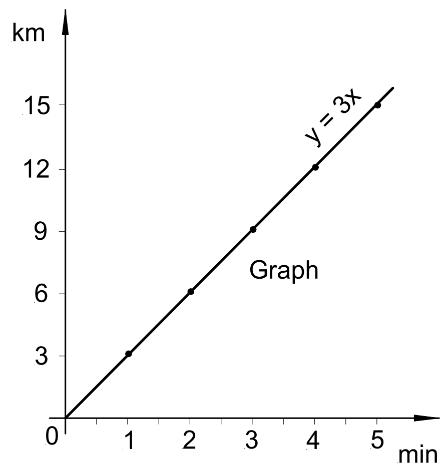
$$\frac{y}{x} = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = 3 = a$$

$\Rightarrow$ y = 3x = ax (Funktionsgleichung)

Anstelle von **"y = ax"** sagt man auch:

"y ist proportional zu x mit dem Proportionalitätsfaktor a."

Grafische Darstellung



Der zurückgelegte Weg ist proportional (verhältnisgleich) zur zugehörigen Zeit.

Die Funktion x → ax ist eine Halbgerade die im Nullpunkt beginnt.

Proportionale Zuordnungen

LU 4, 6, 18, 22, 31

Proportionale Zuordnung

«Je mehr, desto mehr; je weniger, desto weniger!»
Die Vielfachen stehen in einem proportionalen Verhältnis.

⇨ Benzinmenge in Liter → Preis in Fr.
Zur doppelten Literzahl gehört der doppelte Preis.

Geldwert in Fr. → Geldwert in Euro
Zum halben Frankenwert gehört der halbe Eurowert.

Wertetabelle

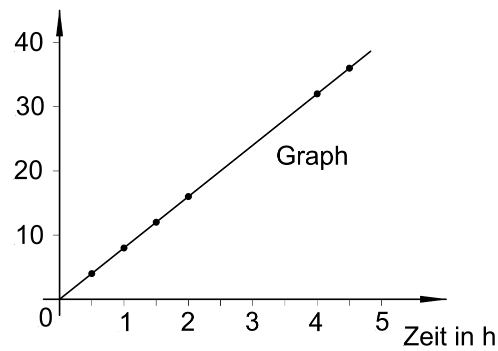
⇨ Das Wägestück einer Standuhr bewegt sich in 1 h um 8 cm nach oben. Da diese Zuordnung proportional ist, kann folgende Wertetabelle ausgefüllt werden.

x: Zeit in h	0.5	**1**	1.5	2	4	4.5	...
y: Länge in cm	4	**8**	12	16	32	36	...

Diese proportionale Zuordnung kann auch im Koordinatensystem dargestellt werden.

Grafische Darstellung

⇨



Das Schaubild einer proportionalen Zuordnung ist eine **Halbgerade**.

Die Halbgerade beginnt im Nullpunkt (0/0) und ist durch einen weiteren Punkt festgelegt.

Rechnen mit proportionalen Zuordnungen

⇨

: 2   · 3

h	0.5	1	1.5	2	4	4.5	. . .
cm	4	8	12	16	32	36	. . .

: 2   · 3

Umgekehrt proportionale Zuordnungen

LU 2, 18, 22

Umgekehrt proportionale Zuordnung

«Je mehr, desto weniger; je weniger, desto mehr!»
Die Vielfachen stehen in einem umgekehrt proportionalen Verhältnis.

⇨ Grösse der Verpackungseinheit → Anzahl der Pakete
Je grösser die Verpackungseinheit, umso kleiner die Anzahl Pakete.

Anzahl der Lastwagen → benötigte Zeit in h
Zur halben Anzahl Lastwagen gehört die doppelte Zeit.

Wertetabelle

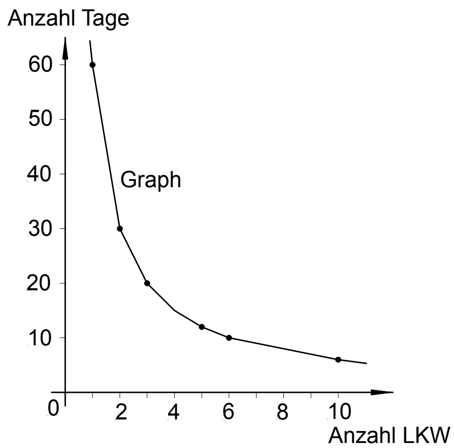
⇨ Ein Baugeschäft fährt mit 5 Lastwagen einen Schuttberg in 12 Tagen ab. Wie viele Tage benötigen 6 Lastwagen?

x: Anzahl Lastwagen (LKW)	1	2	3	5	6	10	...
y: Anzahl Tage (d)	60	30	20	12	10	6	...

Diese umgekehrte proportionale Zuordnung kann auch im Koordinatensystem dargestellt werden.

Grafische Darstellung

⇨



Das Schaubild einer umgekehrt proportionalen Zuordnung ist eine **Hyperbel**.

Rechnen mit umgekehrt proportionalen Zuordnungen

⇨

· 3 : 2

Anzahl	1	2	3	5	6	10	. . .
Tage	60	30	20	12	10	6	. . .

: 3 · 2

Negative Zahlen

LU 31, 32

Gewinnung der negativen Zahlen	Die Gleichung $5 + x = 3$ ist in N_0 unlösbar, weil es keine natürliche Zahl gibt, welche die Gleichung $5 + x = 3$ zu einer wahren Aussage machen kann. Um diese Einschränkung aufzuheben, erweitert man den Zahlenstrahl nach links über den Nullpunkt hinaus und erhält die Zahlengerade. Zur Unterscheidung zu den natürlichen Zahlen versieht man die neuen Zahlen immer mit einem – Zeichen und nennt sie negative Zahlen. ⇨ Zahlengerade –4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 *negative Zahlen* *positive Zahlen*
Addition und Subtraktion	Fürs Addieren und Subtrahieren ergeben sich je die folgenden Fälle. **Addition** $(+4) + (+3) = +(4 + 3) = +7 = 7$ $(-4) + (-3) = -(4 + 3) = -7$ $(+4) + (-3) = +(4 - 3) = +1 = 1$ $(-4) + (+3) = -(4 - 3) = -1$ **Subtraktion** $(+4) - (+3) = +(4 - 3) = +1 = 1$ $(+3) - (+4) = -(4 - 3) = -1$ $(-4) - (-3) = -(4 - 3) = -1$ $(-3) - (-4) = +(4 - 3) = +1 = 1$ $(+4) - (-3) = +(4 + 3) = +7 = 7$ $(-4) - (+3) = -(4 + 3) = -7$
Regeln	1. *Sind Vorzeichen und Rechenzeichen gleich, so werden die Beträge der Zahlen addiert.* 2. *Sind Vorzeichen und Rechenzeichen verschieden, so werden die Beträge der Zahlen subtrahiert und das Vorzeichen des grösseren Betrags übernommen.* ⇨ $(+2x) + (+3x) = 2x + 3x = 5x$ $(-3a) + (-4a) = -3a - 4a = -7a$ $(+5a) + (-6a) = 5a - 6a = -a$ $(-7b) + (+5b) = -7b + 5b = -2b$ $(+4a) - (+5a) = 4a - 5a = -a$ $(-18c) - (-4c) = -18c + 4c = -14c$ $(+3x) - (-9x) = 3x + 9x = 12x$ $(+16y) - (-7y) = 16y + 7y = 23y$

Geometrische Grundbegriffe

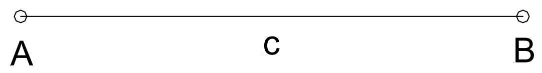
LU 8, 9, 12, 13, 14, 19, 24, 25, 26, 27, 32

Linien – Punkte

Bezeichnungen

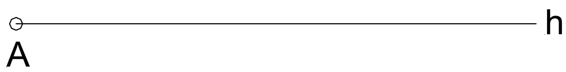
Punkte werden mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet.
A, B, C
Linien werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.
a, b, c

Strecke



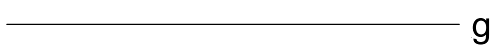
Strecke c = $\overline{AB}$
(Strecken können auch mit zwei grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden.)

Halbgerade



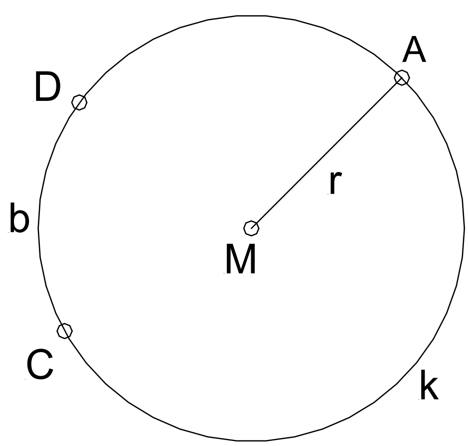
Halbgerade h

Gerade



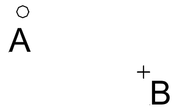
Gerade g

Kreislinie



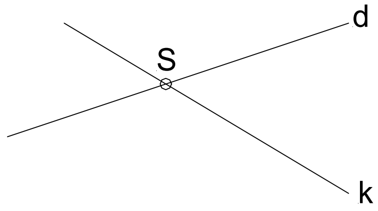
M	Mittelpunkt (Zentrum)
r	Radius ($\overline{MA}$)
k	Kreislinie (Peripherie)
b	Kreisbogen

Punkte



Punkte können mit verschiedenen Symbolen bezeichnet werden.

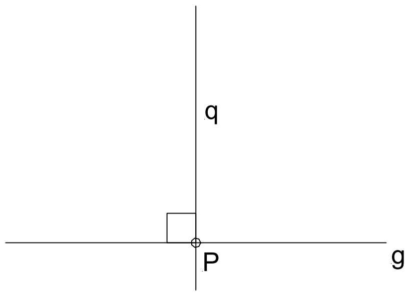
Schnittpunkte



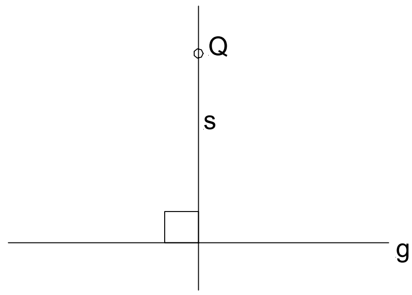
Punkte können durch den Schnitt zweier Linien (Punktmengen) dargestellt werden. Schreibweise: $d \cap k = \{S\}$

Lagebeziehungen

Senkrechte

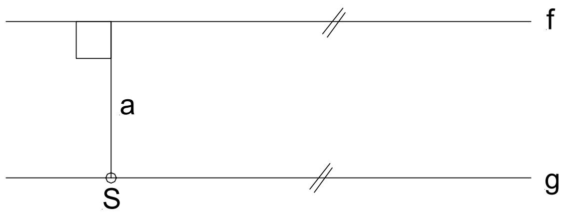


Senkrechte q zu g in P

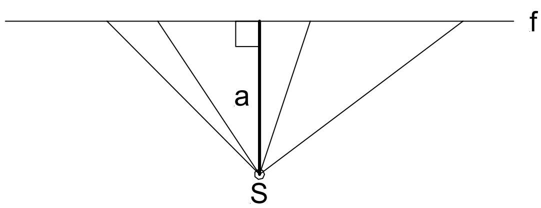


Senkrechte s von Q auf g

Parallele



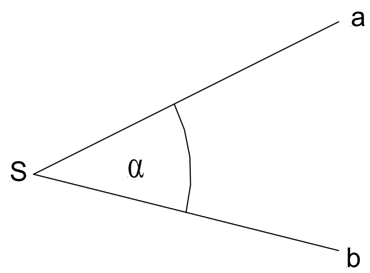
Parallele g zu f durch S
Die kürzeste Verbindung (a) zwischen zwei Parallelen ist die Senkrechte zu diesen und heisst **Abstand a**.



Die kürzeste Verbindung zwischen einem Punkt und einer Geraden heisst **Abstand a.** Der Abstand ist die Senkrechte zu f durch S.

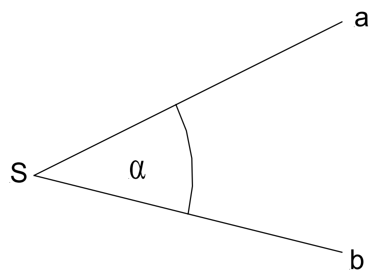
Winkel

Begriffe



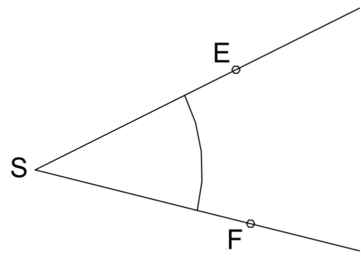
Zwei Halbgeraden, die von einem Punkt S ausgehen, bilden einen Winkel. S bezeichnet man als **Scheitelpunkt**, a und b heissen **Schenkel**.

Bezeichnung



Winkel können mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden.

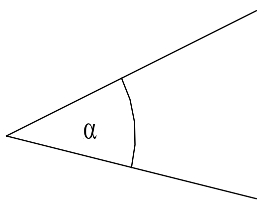
α	alpha	δ	delta
β	beta	ε	epsilon
γ	gamma	φ	phi



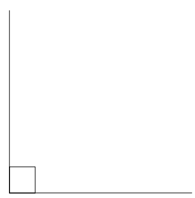
Winkel können mit drei grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden.

$\sphericalangle$ FSE oder $\sphericalangle$ ESF
(Der Scheitelpunkt steht immer in der Mitte.)

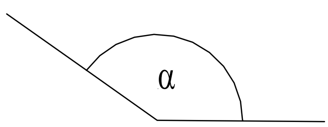
Winkelarten



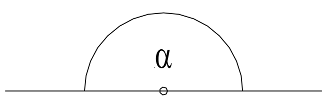
spitzer Winkel (0° < α < 90°)



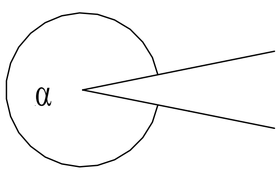
rechter Winkel (α = 90°)



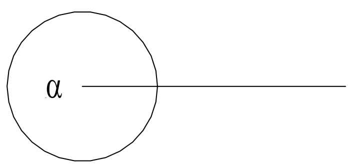
stumpfer Winkel (90° < α < 180°)



gestreckter Winkel (α = 180°)

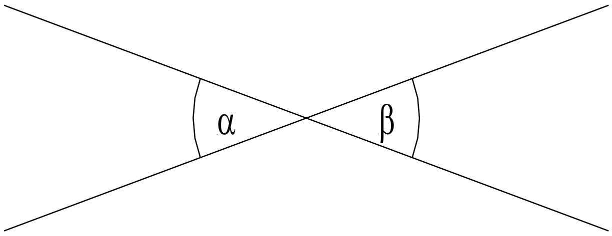


überstumpfer Winkel
(180° < α < 360°)



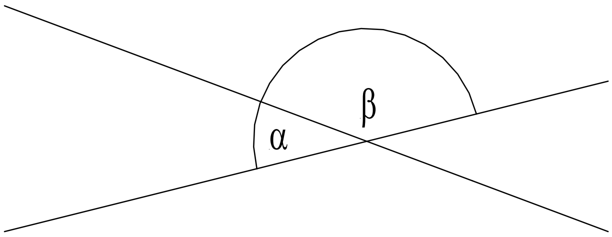
voller Winkel (α = 360°)

Scheitelwinkel



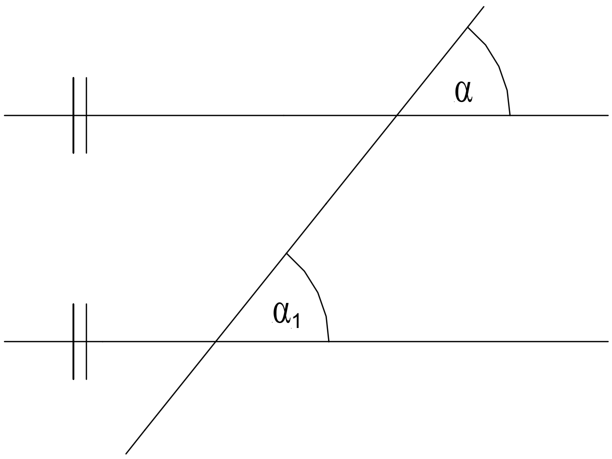
Scheitelwinkel sind gleich gross. $\alpha = \beta$

Nebenwinkel



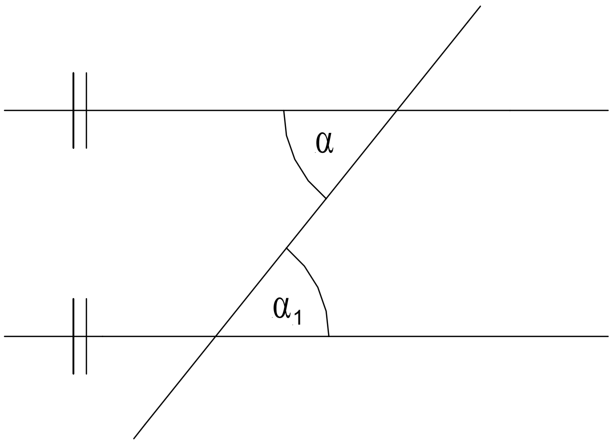
Nebenwinkel ergänzen sich auf 180°. $\alpha + \beta = 180°$

Stufenwinkel



Stufenwinkel an Parallelen sind gleich gross. $\alpha = \alpha_1$

Wechsel-winkel

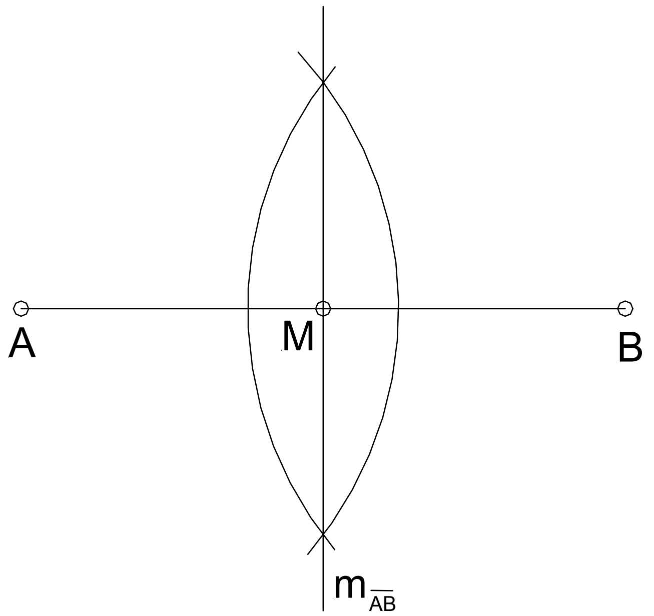


Wechselwinkel an Parallelen sind gleich gross. $\alpha = \alpha_1$

Grundkonstruktionen

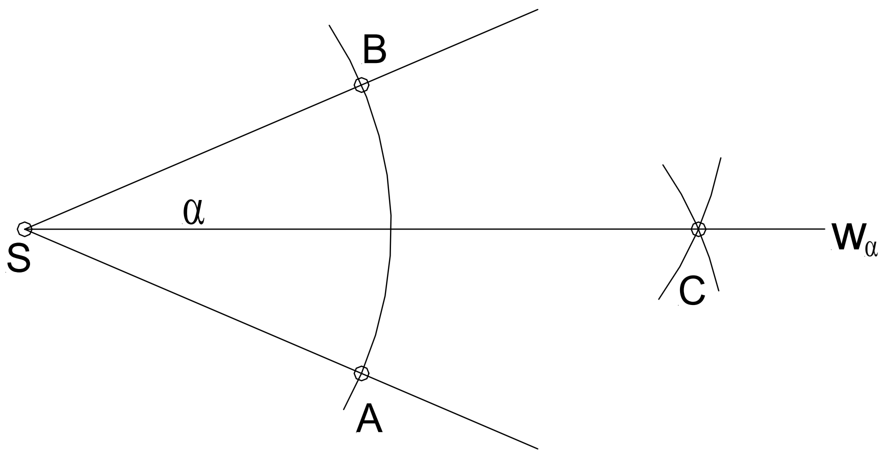
LU 8, 9, 19, 24, 25, 26, 27

Mittel-senkrechte



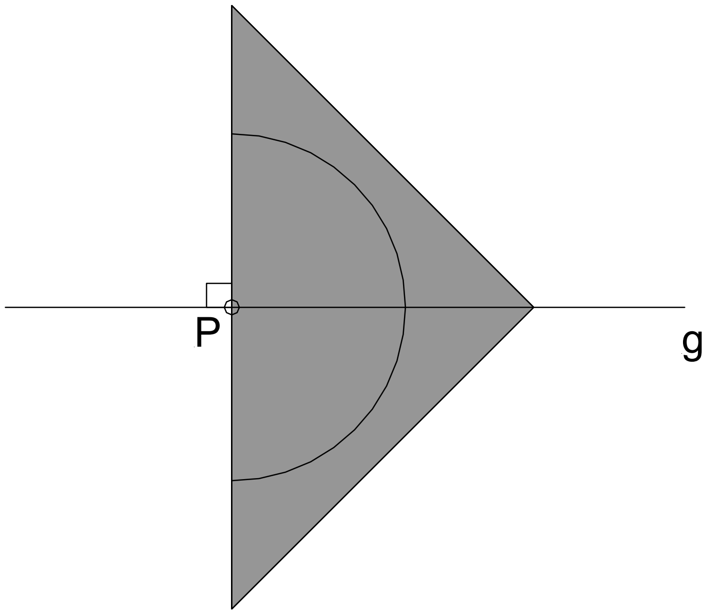
1. Kreisbogen um A
2. Kreisbogen mit **gleichem Radius** um B
3. Schnittpunkte verbinden

Winkel-halbierende



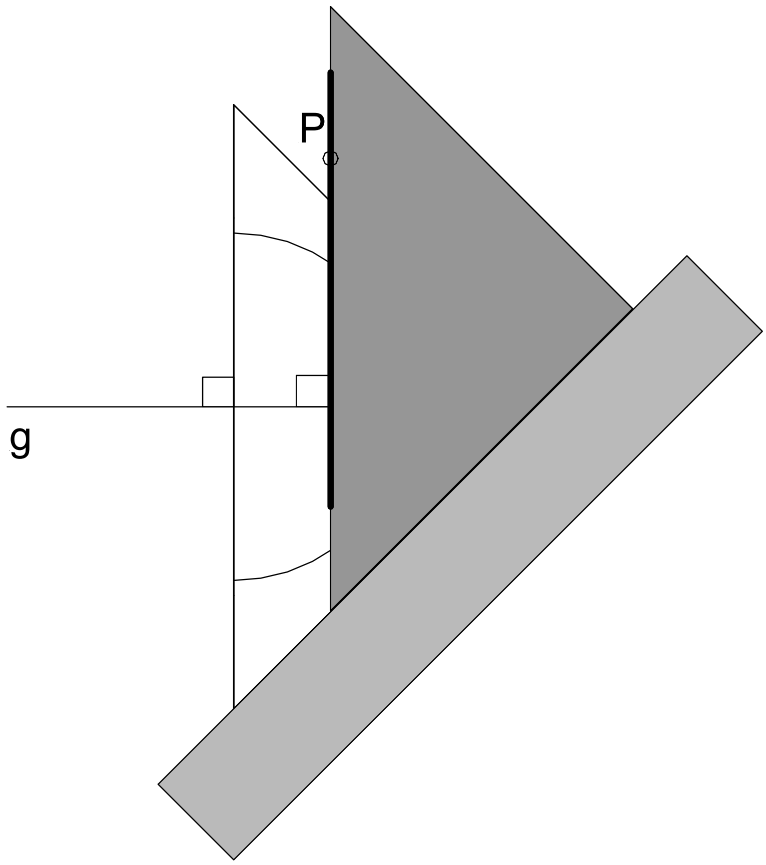
1. Kreisbogen um S $\rightarrow$ A, B
2. Kreisbogen um A und mit gleichem Radius um B $\rightarrow$ C
3. S mit C verbinden $\rightarrow$ w_α

Senkrechte zu g in P



Senkrechte werden mithilfe des Geodreiecks gezeichnet.

Senkrechte von P auf g



In diesem Fall ist eine Parallelverschiebung mithilfe des Massstabs nötig.
Die Senkrechte von P auf g wird oft auch als **Lot** von P zur Geraden g bezeichnet.

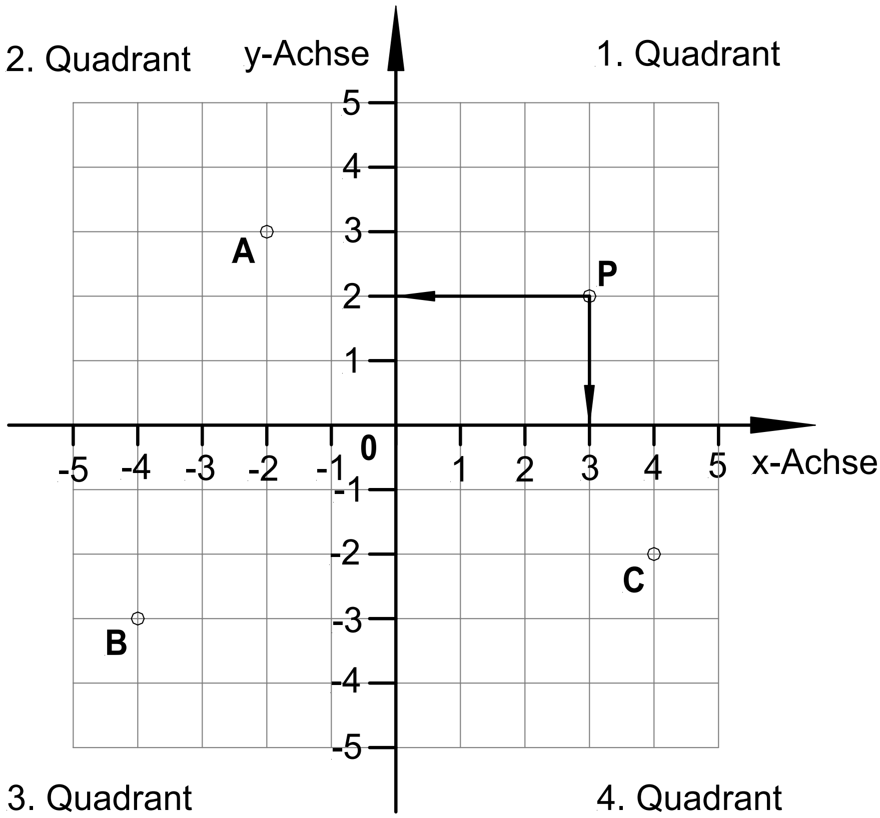
Koordinatensystem

LU 18, 23, 32

Koordinaten

Um die Lage von Punkten in der Ebene festzulegen, werden zwei zueinander senkrecht stehende Geraden gezeichnet.
Der Schnittpunkt heisst **Nullpunkt** oder Ursprung. Die **waagrechte** Zahlengerade heisst **x-Achse**, die **senkrecht** dazu stehende heisst **y-Achse**. Vom Nullpunkt aus werden immer gleiche Strecken (Einheitsstrecken) abgetragen und nummeriert. Um die Lage eines Punktes anzugeben, werden von ihm aus die Senkrechten zur x- und y-Achse gezeichnet. Die abgelesenen Werte ergeben für diesen Punkt die **Koordinaten x und y**.

Schreibweise: P (x/y) im Beispiel: P (3/2)

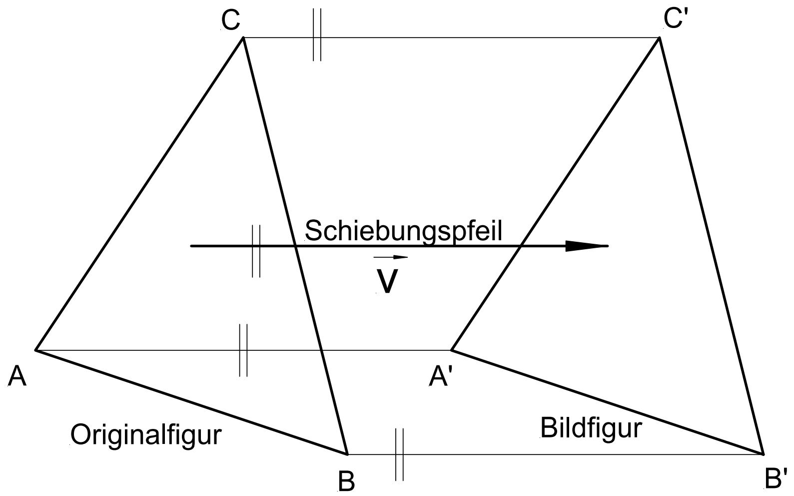


⇨ A (-2/3)
B (-4/-3)
C (4/-2)

Abbildungen – Symmetrien

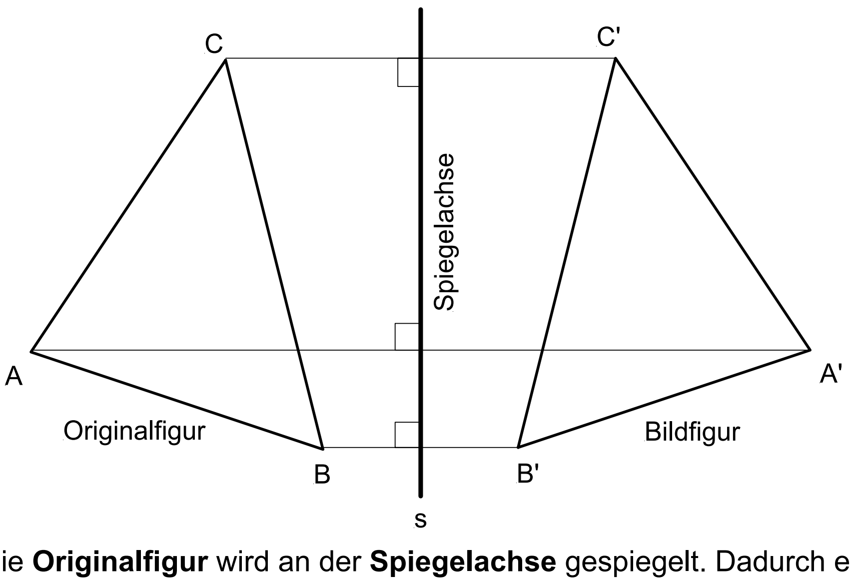
LU 9, 13, 19, 24, 25, 26, 27, 32

Parallel-verschiebung



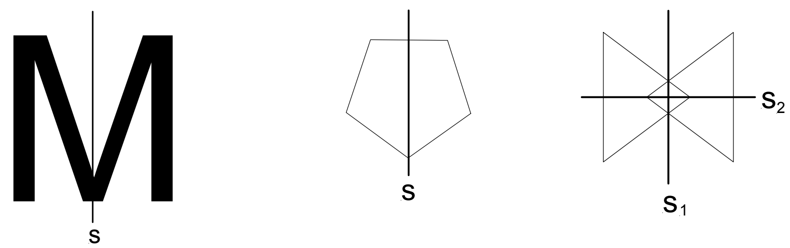
Verschiebt man die **Originalfigur** in einer bestimmten Richtung um eine bestimmte Strecke, so entsteht eine **Bildfigur**.
Der **Schiebungspfeil** gibt Richtung und Betrag der Verschiebung an.

Achsen-spiegelung



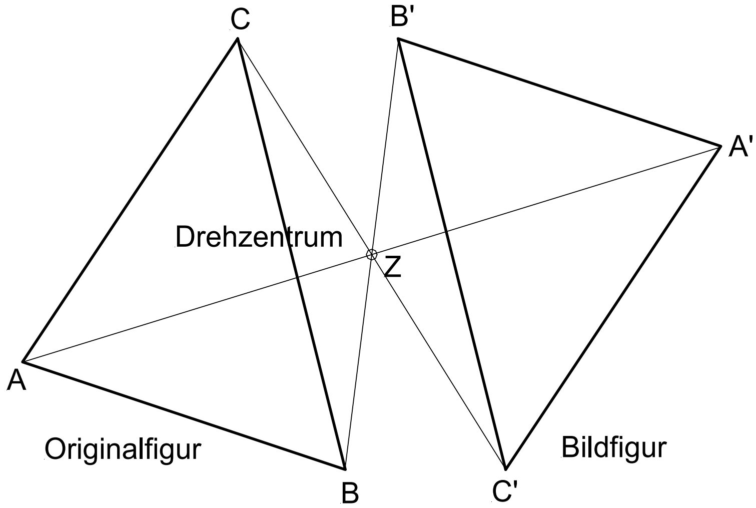
Die **Originalfigur** wird an der **Spiegelachse** gespiegelt. Dadurch entsteht eine **Bildfigur**.
Original- und Bildfigur sind zueinander **achsensymmetrisch**. Die Spiegelachse wird auch als **Symmetrieachse** bezeichnet.

⇨

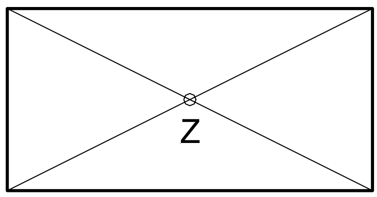


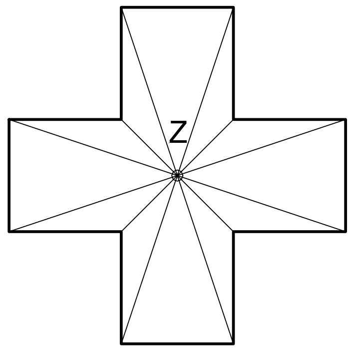
Punkt-spiegelung

Dreht man die Originalfigur um 180° um einen Punkt Z, so entsteht eine Bildfigur. Diese Abbildung nennt man **Punktspiegelung**. Original- und Bildfigur sind zueinander **punktsymmetrisch** bezüglich des **Drehzentrums**. Das Drehzentrum wird auch als **Symmetriezentrum** bezeichnet.



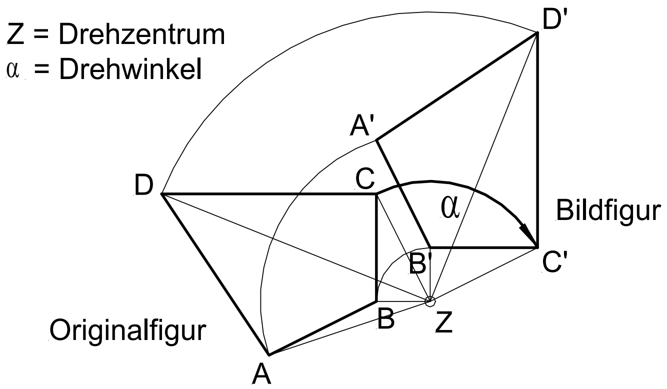
⇨





Drehung

Dreht man die Originalfigur um einen gegebenen Punkt Z um einen bestimmten Winkel, so entsteht eine Bildfigur. Der **Drehwinkel** gibt an, um wie viel Grad die Originalfigur um das Drehzentrum gedreht wurde. Der **Drehsinn** bestimmt die Richtung der Drehung.
Drehsinn: **Uhrzeigersinn – / Gegenuhrzeigersinn +**



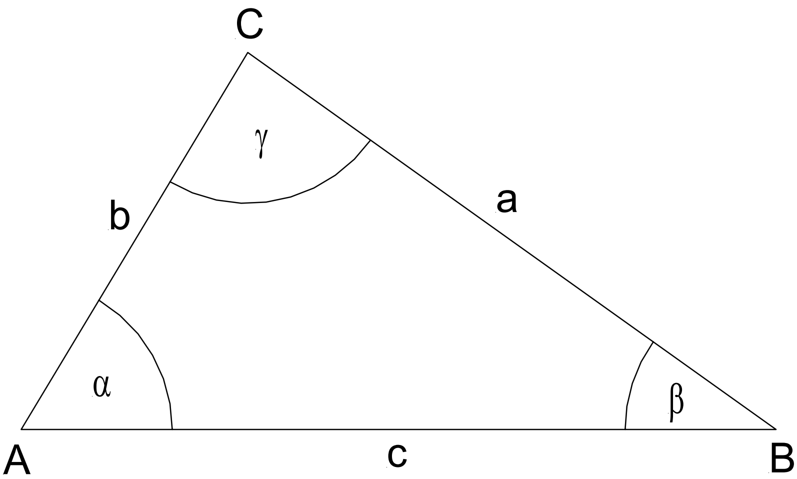
$\alpha = -90°$

Grundformen

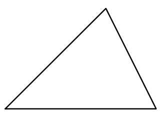
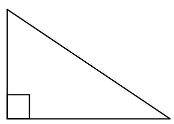
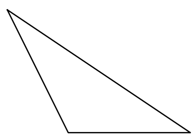
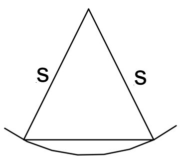
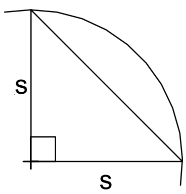
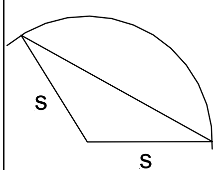
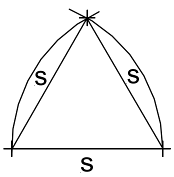
LU 8, 9, 12, 13, 14,

Dreieck

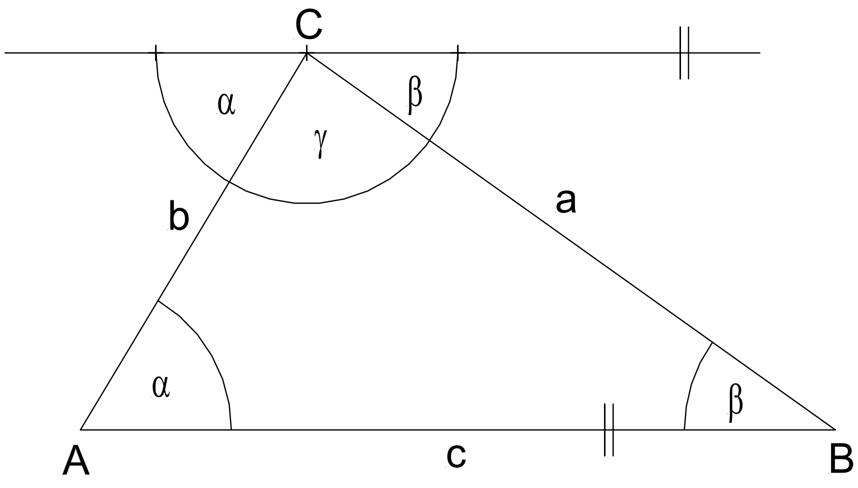
Bezeichnung



Arten

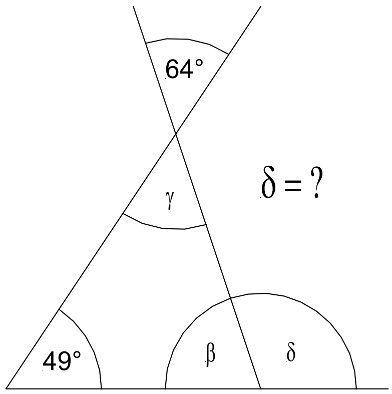
	spitzwinklig	rechtwinklig	stumpfwinklig
ungleichseitig			
gleichschenklig			
gleichseitig			

Innenwinkel



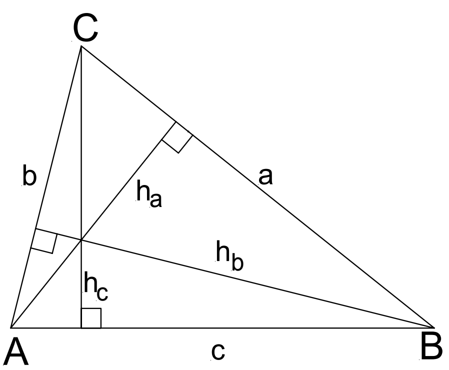
α, β, γ heissen **Innenwinkel des Dreiecks**.
Die Summe der Innenwinkel beträgt 180°. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Dieser Satz wird als **Innenwinkelsatz** des Dreiecks bezeichnet.

⇨



γ = 64° (Scheitelwinkel zu 64°)
β = 67° (Innenwinkelsatz 180° - 64° - 49° = 67°)
δ **= 113°** (Nebenwinkel zu β)

Höhen

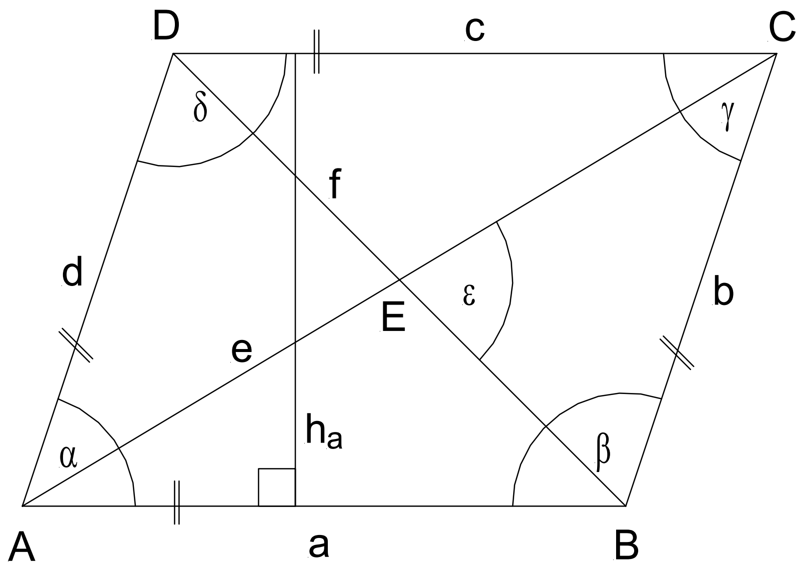


Die kürzeste Verbindungsstrecke (Abstand) von einem Eckpunkt zur gegenüberliegenden Dreiecksseite heisst **Höhe**.
Bezeichung: h_a, h_b, h_c (Man sagt: Höhe auf die Seite a oder Höhe a)

Parallelogramme

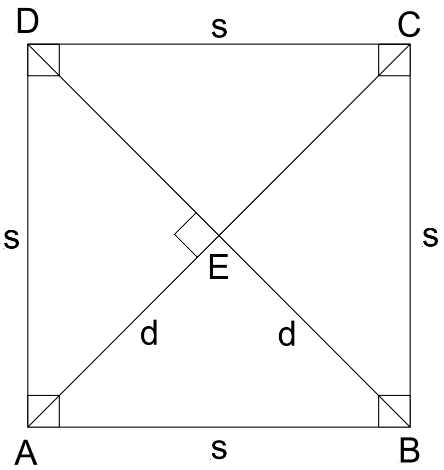
Bezeichnung

Jedes Viereck mit zwei Paar parallelen Seiten nennt man **Parallelogramm**.



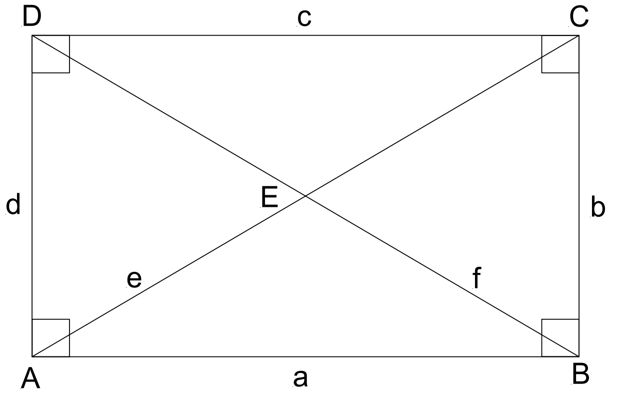
e, f	Diagonalen	(e ist immer $\overline{AC}$)
E	Diagonalenschnittpunkt	
ε	Diagonalenwinkel	
h_a	Höhe auf a	(anlog gibt es eine Höhe h_b auf b)

Quadrat



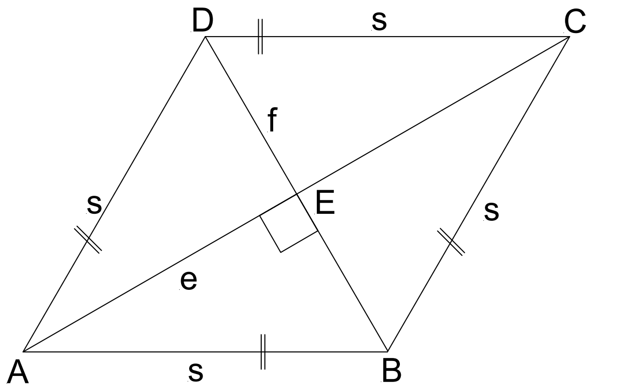
Seiten	alle vier gleich lang (s)
Diagonalen	gleich lang (e = f = d)
Eckwinkel	90°
Diagonalenwinkel	90°

Rechteck



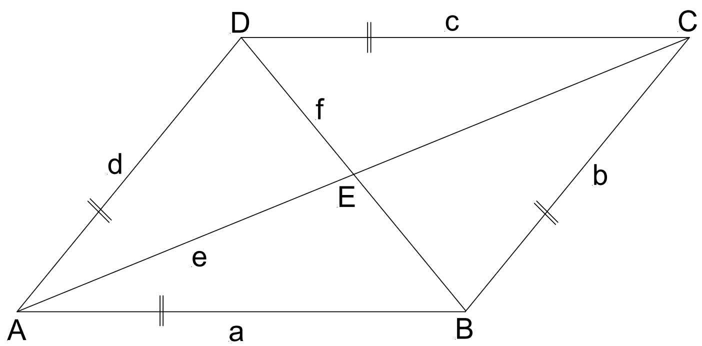
Seiten	je zwei Seiten gleich lang (a = c und b = d)
Diagonalen	gleich lang (e = f)
Eckwinkel	90°

Rhombus



Seiten	alle Seiten gleich lang
Diagonalenwinkel	90°

Parallelo-gramm

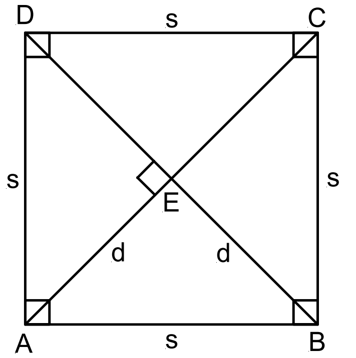
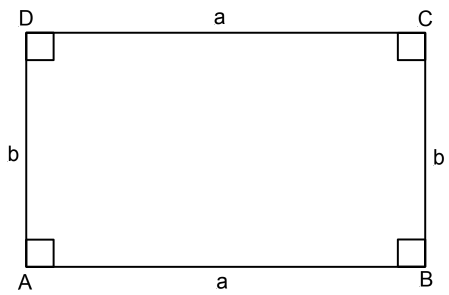
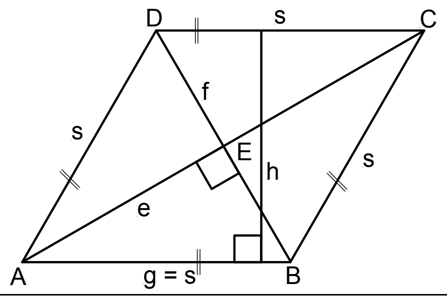
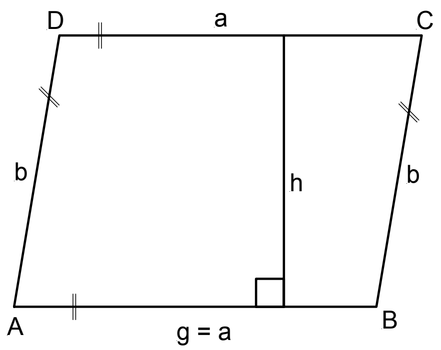


Seiten	je zwei Seiten gleich lang (a = c, b = d)
Diagonalenwinkel	≠ 90°

Grundformen – Berechnungen

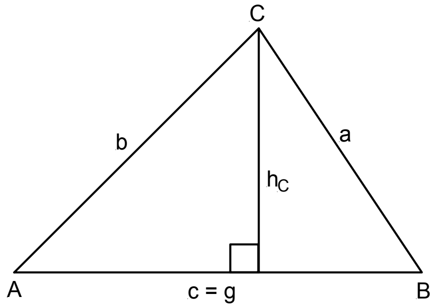
LU 6, 9, 10, 12, 14, 22, 34

Parallelogramme

Quadrat		**Flächeninhalt** $A = s \cdot s = s^2$ $A = \frac{d \cdot d}{2} = \frac{d^2}{2}$ **Umfang** $u = 4 \cdot s$	**Seite** $s = \sqrt{A}$ $d = \sqrt{2 \cdot A}$ $s = \frac{u}{4}$
Reckteck		**Flächeninhalt** $A = a \cdot b$ **Umfang** $u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$	**Länge/Breite** $a = \frac{A}{b}$ $b = \frac{A}{a}$ $a = \frac{u}{2} - b$ $b = \frac{u}{2} - a$
Rhombus		**Flächeninhalt** $A = g \cdot h$ **Umfang** $u = 4 \cdot s = 4 \cdot g$	**Seite/Höhe** $g = \frac{A}{h}$ $h = \frac{A}{g}$ $s = g = \frac{u}{4}$
Parallelo-gramm		**Flächeninhalt** $A = g \cdot h$ **Umfang** $u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$	**Seite/Höhe** $g = \frac{A}{h}$ $h = \frac{A}{g}$ $a = \frac{u}{2} - b$ $b = \frac{u}{2} - a$

Dreiecke

Allgemeines Dreieck



Flächeninhalt

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

allgemein

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Seite/Höhe

$$c = \frac{2 \cdot A}{h_c}$$

$$h_c = \frac{2 \cdot A}{c}$$

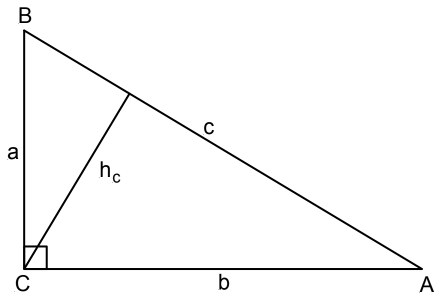
$$g = \frac{2 \cdot A}{h}$$

$$h = \frac{2 \cdot A}{g}$$

Umfang

$u = a + b + c$

Recht-winkliges Dreieck



Flächeninhalt

① $A = \frac{a \cdot b}{2}$

oder

② $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

aus ① und ②
folgt auch:

$a \cdot b = c \cdot h_c$

Seite/Höhe

$$a = \frac{2 \cdot A}{b}$$

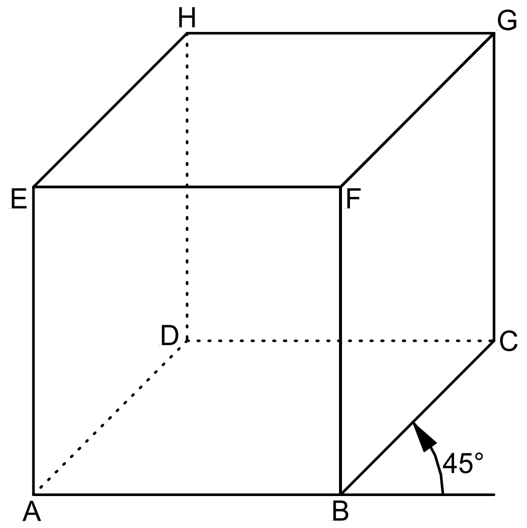
$$b = \frac{2 \cdot A}{a}$$

Würfel – Quader

5, 13, 14

Würfel

Würfel Schrägbild

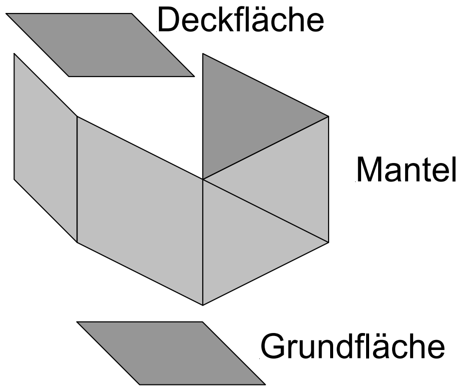


Der Würfel ist ein Körper mit:

6 Flächen (Quadrate)
12 Kanten
8 Ecken

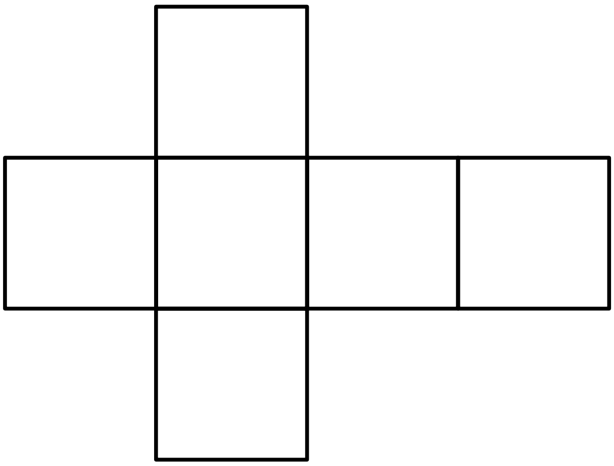
Für die räumliche Darstellung verwendet man **Schrägbilder**. Die nach hinten laufenden Linien werden meist unter einem Winkel von **45°** gezeichnet und auf die **Hälfte der wirklichen Länge** verkürzt. Unsichtbare Kanten werden in der Regel gestrichelt gezeichnet.

Teile der Würfeloberfläche



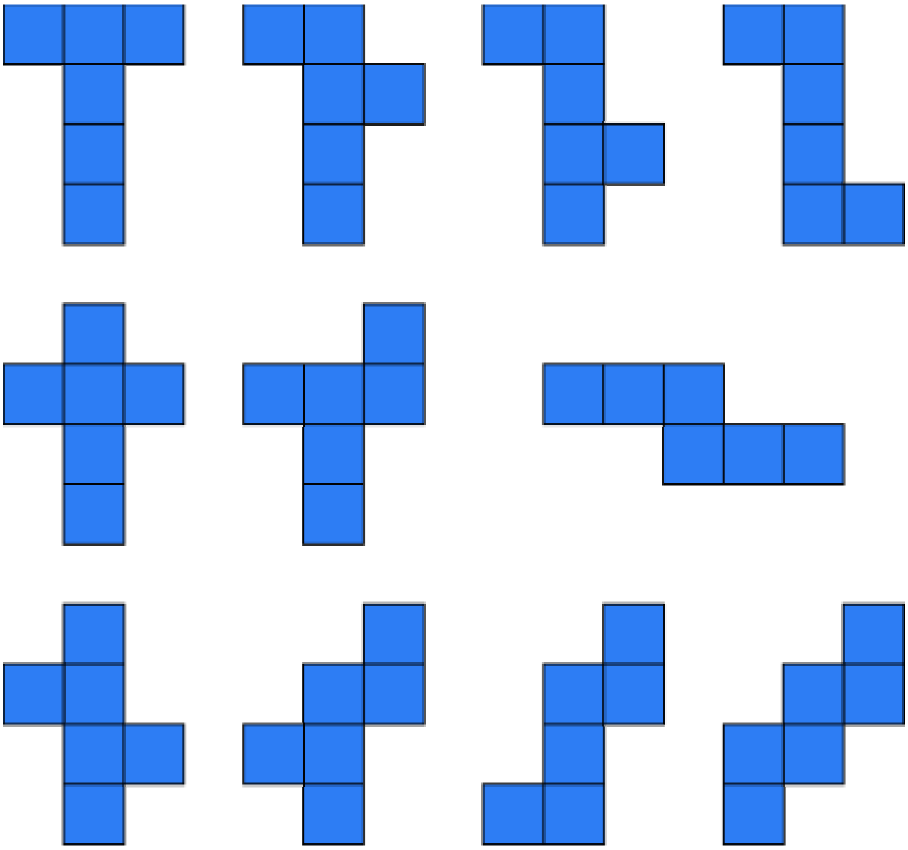
Grundfläche, Mantel und Deckfläche bilden zusammen die **Oberfläche** des Würfels.

Netz des Würfels

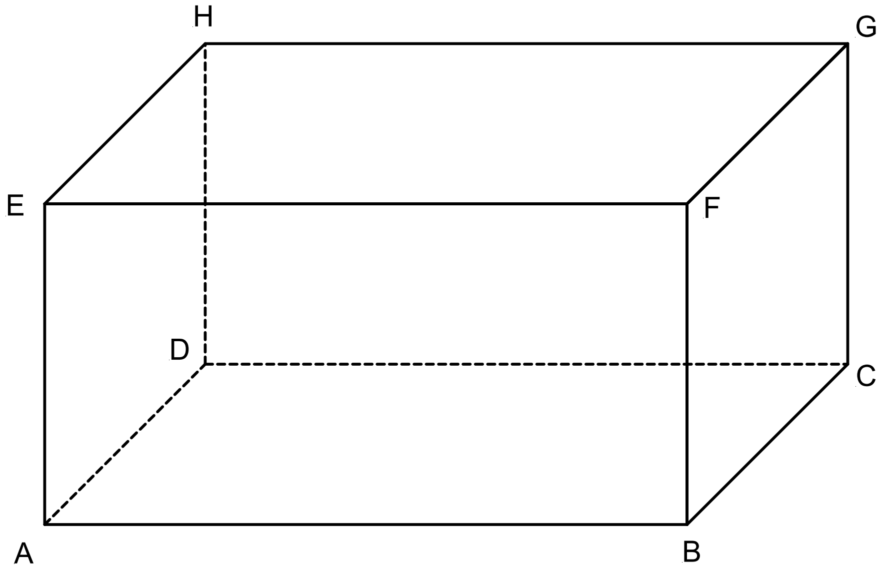


Wird die Oberfläche zusammenhängend ausgebreitet, so erhält man das **Netz** des Würfels.
Aus einem Würfelnetz lässt sich der Würfel allein durch Falten herstellen.

Alle möglichen Würfelnetze



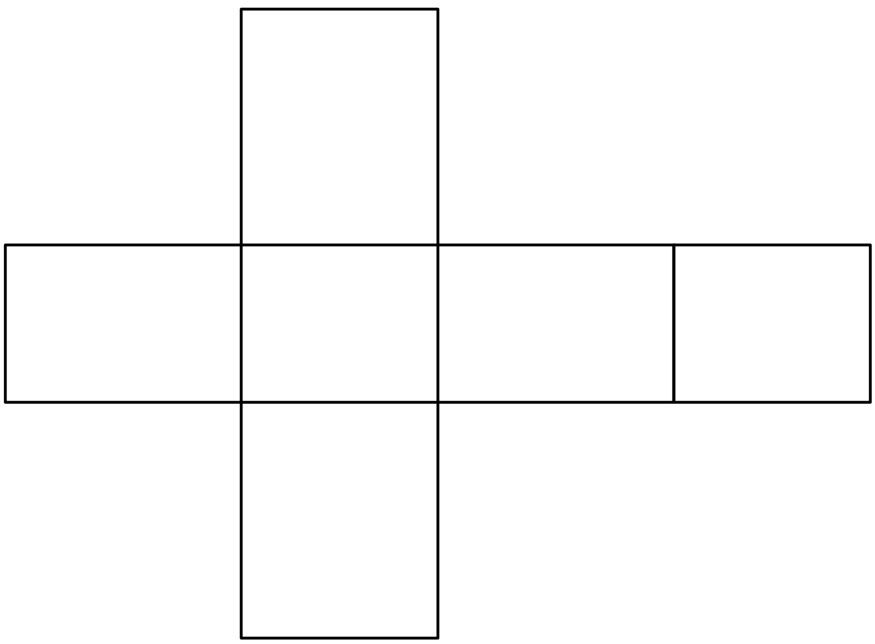
Quader Schrägbild



6	Flächen	Je zwei gegenüberliegende Rechtecke sind **kongruent***.
12	Kanten	Je 4 Strecken sind gleich lang und zueinander parallel.
8	Ecken	

***kongruent**: Figuren mit gleicher Form und Fläche sind kongruent oder deckungsgleich.

Netz des Quaders

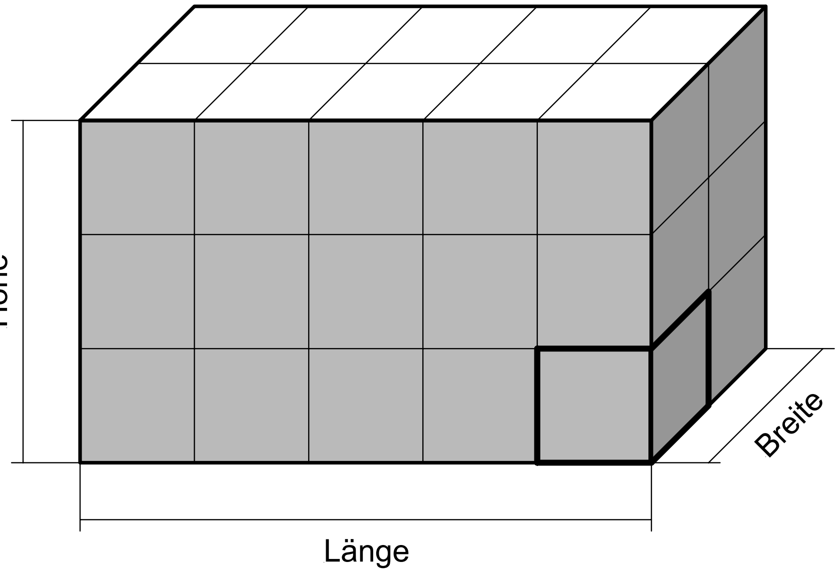


Würfel – Quader – Berechnungen

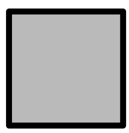
LU 6, 14, 22, 34

Volumen und Oberfläche

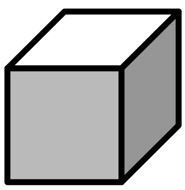
Herleitung



Einheitsstrecke



Einheitsfläche



Einheitsvolumen

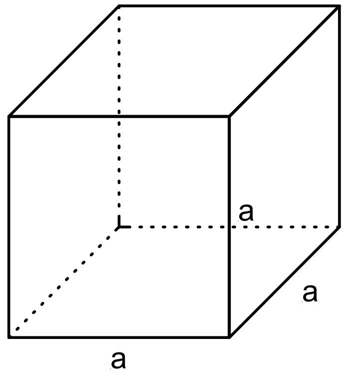
Man denkt sich den Quader aus **Einheitsvolumen** (Würfeln) zusammen gesetzt.
Man erhält so 5 Würfel in der Länge, 2 in der Breite und 3 in der Höhe.

Das **Volumen** des Quaders besteht also aus 5 • 2 • 3 = 30 Einheitswürfeln.

Die gleichen Überlegungen kann man für die Oberfläche machen.

Die Oberfläche des obigen Quaders besteht aus 62 **Einheitsflächen**.

Würfel



Volumen

$V = a^3$

Kantenlänge

$a = \sqrt[3]{V}$

Grundfläche

$A = a^2$

$a = \sqrt{A}$

Mantel

$M = 4 \cdot a^2$

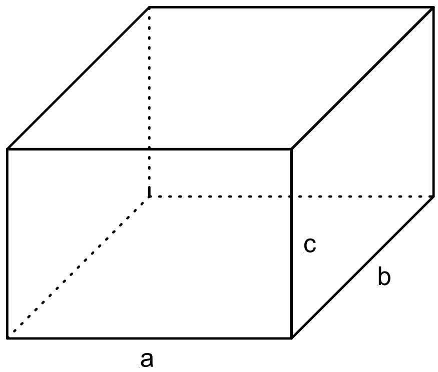
$a = \sqrt{\frac{M}{4}}$

Oberfläche

$O = 6 \cdot a^2$

$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$

Quader



Volumen

$V = a \cdot b \cdot c$

Kantenlänge

$a = \frac{V}{b \cdot c}$

$b = \frac{V}{a \cdot c}$

$c = \frac{V}{a \cdot b}$

Mantel

$M = 2(a \cdot c + b \cdot c)$

Oberfläche

$O = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Anhang

Mathematische Zeichen

+	plus
–	minus
· (*)	mal
: (/)	durch
=	gleich
$\neq$	nicht gleich (ungleich)
$\equiv$	identisch
$\approx$	ungefähr
∞	unendlich
$<$	kleiner als
$>$	grösser als
$\leq$	kleiner oder gleich
$\geq$	grösser oder gleich
$\Rightarrow$	daraus folgt
$\Leftrightarrow$	ist äquivalent mit
$\surd$	Wurzel

$\in$	ist Element aus
$\notin$	ist kein Element aus
$\cap$	geschnitten mit
$\cup$	vereinigt mit
$\subset$	ist Teilmenge von
{ }	leere Menge
T	Term
N	Menge der natürlichen Zahlen
Z	Menge der ganzen Zahlen
Q	Menge der rationalen Zahlen
B	Menge der Bruchzahlen
$\perp$	rechtwinklig
$\parallel$	parallel

Vorsatzzeichen

Zeichen	Vorsatz	Bedeutung	Faktor
T	Tera	Billionenfach	10^{12}
G	Giga	Milliardenfach	10^{9}
M	Mega	Millionfach	10^{6}
k	Kilo	Tausendfach	10^{3}
h	Hekto	Hundertfach	10^{2}
da	Deka	Zehnfach	10^{1}
d	Dezi	Zehntel	10^{-1}
c	Zenti	Hundertstel	10^{-2}
m	Milli	Tausendstel	10^{-3}
µ	Mikro	Millionstel	10^{-6}
n	Nano	Milliardstel	10^{-9}
p	Piko	Billionstel	10^{-12}

Masseinheiten

Länge l (r,s) Einheit: **m** Meter — Verwandlungszahl 10

$1\ m = 10\ dm$
$1\ dm = 10\ cm$
$1\ cm = 10\ mm$

Fläche A Einheit: **m^2** Quadratmeter — Verwandlungszahl 100

$1\ km^2 = 100\ ha$
$1\ ha = 100\ a$
$1\ a = 100\ m^2$
$1\ m^2 = 100\ dm^2$
$1\ dm^2 = 100\ cm^2$
$1\ cm^2 = 100\ mm^2$

Volumen V Einheit: **m^3** Kubikmeter — Verwandlungszahl 1000

$1\ m^3 = 1000\ dm^3$
$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$
$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$

$1\ dm^3 = 1\ l$ (Liter) $= 1000\ ml$
$1\ cm^3 = 1\ ml$

Masse m («Gewicht») Einheit: **kg** Kilogramm — Verwandlungszahl 1000

$1\ t = 1000\ kg$
$1\ kg = 1000\ g$
$1\ g = 1000\ mg$

Zeit t Einheit: **s** Sekunde

$1d = 24\ h$
$1\ h = 60\ min$
$1\ min = 60\ s$

Bruchteile einer Sekunde werden in Zehntel-, Hundertstel- oder Tausendstelsekunden angegeben.

Temperatur T Einheit: **K** Kelvin

273 K = 0° C
373 K = 100° C

Geschwindigkeit v Einheit: **m/s** Meter pro Sekunde
km/h Kilometer pro Stunde

$$1\ \frac{m}{s} = 3{,}6\ \frac{km}{h}$$

$$0{,}2\overline{7}\ \frac{m}{s} = 1\ \frac{km}{h}$$

Stichwortverzeichnis

Stichwortverzeichnis